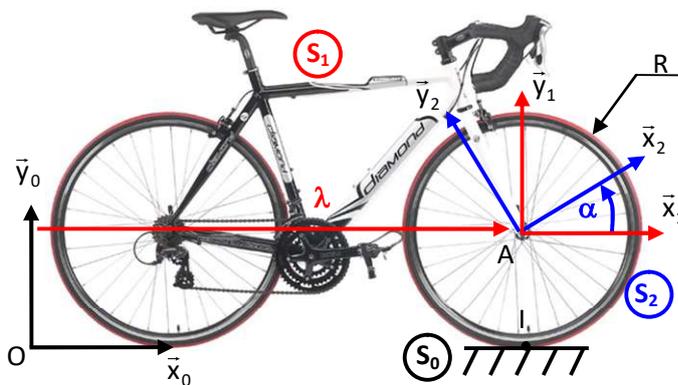
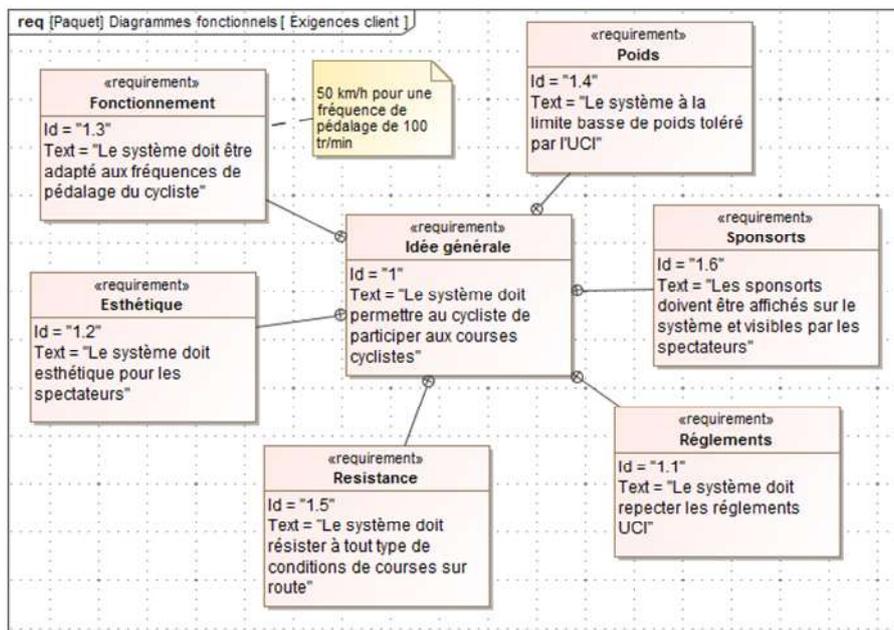


## Roue de vélo sur le sol

On s'intéresse à un vélo de course dont on donne ci-dessous une partie de la modélisation ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel.



On considère que le vélo avance, les roues de rayon  $R$  ( $R = 350\text{mm}$ ) roulent alors sans glisser sur le sol. La position du vélo (point A) est repérée par la longueur  $\lambda(t)$  et la rotation de la roue par l'angle  $\alpha(t)$ . L'objectif est de définir la relation entre la rotation de la roue du vélo et la vitesse du vélo qui permettra ensuite de vérifier le critère de performance du cahier des charges.



- Q.1.** Construire un schéma cinématique permettant de modéliser le système ainsi que les figures planes de repérage/paramétrage.
- Q.2.** Exprimer la condition de roulement sans glissement en I.
- Q.3.** En déduire la relation entre  $\dot{\lambda}$  et  $\dot{\alpha}$ .
- Q.4.** Pour un braquet  $51 \times 14$ , déterminer la fréquence de pédalage (en tour/min) d'un coureur cycliste (professionnel^^) lorsque celui-ci roule à une vitesse de 50 km/h. Conclure vis-à-vis du cahier des charges.

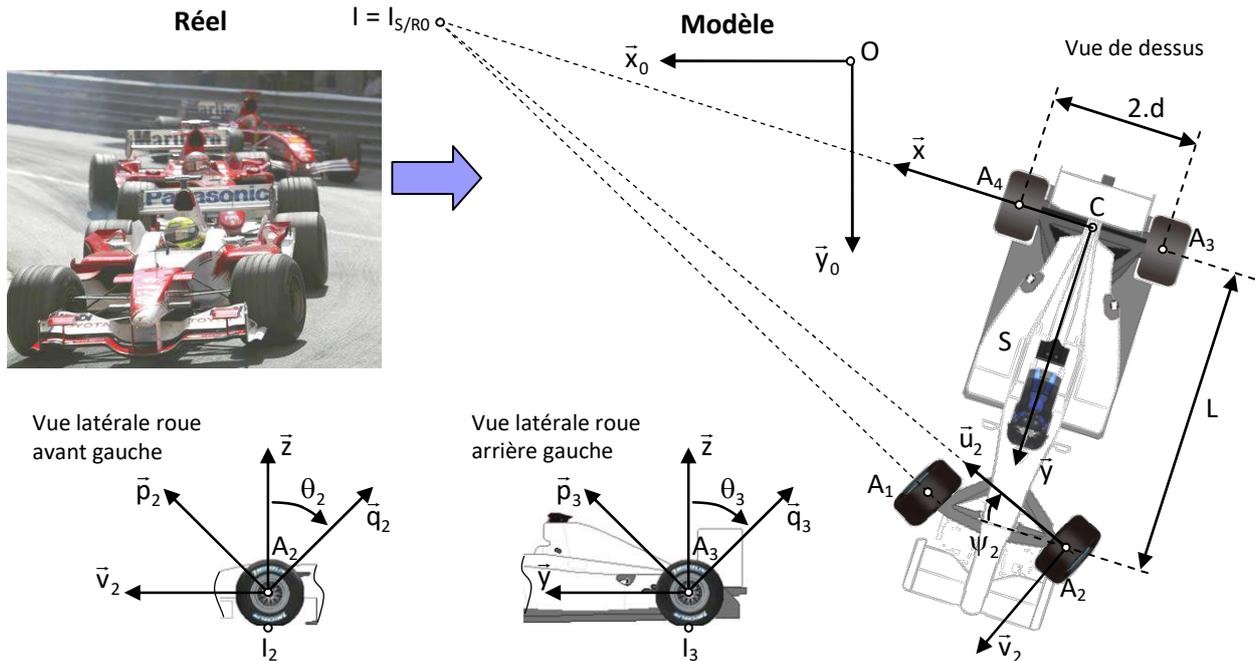
Remarque : un braquet  $51 \times 14$  correspond au nombre de dents du plateau puis du pignon de la roue arrière, il s'agit ici d'un braquet pour du plat. En montagne des braquets autour de  $38 \times 23$  sont plutôt utilisés.

**Etude des performances cinématiques en virage d'une Formule 1**

Une Formule 1 doit assurer un certain nombre d'exigences techniques afin d'assurer les meilleures performances en course tout en garantissant la sécurité du pilote. Une de ces exigences est que « le système doit tenir la trajectoire en phase de virage ». Pour y parvenir, le véhicule dispose d'une cinématique particulière permettant aux roues de tourner sur le sol en limitant le risque de glissement.



On s'intéresse aux conséquences pratiques nécessaire pour assurer la condition de roulement sans glissement des roues sur le sol. On supposera donc que les 4 roues roulent sans glisser dans le plan  $(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0)$ .



Pour cette étude on considère que le véhicule est constitué d'un châssis (S) et de 4 roues ( $S_i$ ) avec  $i=1,2,3,4$ . Le châssis est modélisé par un rectangle  $A_1-A_2-A_3-A_4$  tel que  $\overrightarrow{A_4A_3} = \overrightarrow{A_1A_2} = 2.d.\bar{x}$  et  $\overrightarrow{A_4A_1} = \overrightarrow{A_3A_2} = L.\bar{y}$  où L correspond à l'empattement du véhicule et 2.d à la voie.

On définit le repère  $R(C, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  attaché au châssis où le point C, origine du repère, est tel que  $\overrightarrow{A_4C} = d.\bar{x}$ . Le véhicule est en phase de virage et on considère alors qu'il est en rotation par rapport au repère  $R_0(O, \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$  autour du point  $I_{S/R_0} = I$ , centre instantanée de rotation du mouvement. On pose  $\beta = (\bar{x}_0, \bar{x})$  angle de rotation du châssis par rapport à  $R_0$ .

On définit le repère  $R_i(A_i, \bar{u}_i, \bar{p}_i, \bar{q}_i)$  attaché à chaque roue  $S_i$ . Ces 4 roues de rayon R sont en liaison pivot avec le châssis S suivant les axes  $(A_i, \bar{u}_i)$  avec  $i=1,2,3,4$ . On pose  $\theta_i = (\bar{z}, \bar{q}_i)$  angle de rotation de la roue i par rapport au châssis.

Afin d'assurer la direction du véhicule, les 2 roues pivotent d'un angle  $\psi_1$  suivant l'axe  $(A_1, \bar{z})$  pour la roue 1 et d'un angle  $\psi_2$  suivant l'axe  $(A_2, \bar{z})$  pour la roue 2 avec  $\psi_1 = (\bar{x}, \bar{u}_1) = (\bar{y}, \bar{v}_1)$  et  $\psi_2 = (\bar{x}, \bar{u}_2) = (\bar{y}, \bar{v}_2)$ .

On considère que le contact sol/roue et assimilable à un contact ponctuel en  $I_i$  de normale  $(I_i, \bar{z})$  tel que  $\overrightarrow{I_iA_i} = R.\bar{z}$ .

**Q.1.** Etablir les figures géométrales utiles.

**Q.2.** Ecrire la condition de roulement sans glissement de la roue ( $S_1$ ) par rapport au sol ( $R_0$ ). En déduire une relation vectorielle simple entre  $\overrightarrow{V_{I_1, S_1/S}}$  et  $\overrightarrow{V_{I_1, S/R_0}}$ .

**Q.3.** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{S/R_0}^l\}$  écrit en I. En déduire alors  $\overrightarrow{V_{1,S/R_0}}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}}$  et  $\overrightarrow{l_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Q.4.** Donner la forme simple du torseur cinématique  $\{\mathcal{V}_{S_1/S}^l\}$  écrit en  $A_1$ . En déduire alors  $\overrightarrow{V_{1,S_1/S}}$  en fonction de  $\overrightarrow{\Omega_{S_1/S}}$  et  $\overrightarrow{A_1 l_1}$  (on n'effectuera pas les produits vectoriels).

**Q.5.** Déduire des relations précédentes que  $\overrightarrow{\Omega_{S/R_0}} \wedge \overrightarrow{l_1} + \overrightarrow{\Omega_{S_1/R_0}} \wedge \overrightarrow{A_1 l_1} = \vec{0}$ .

**Q.6.** On pose  $\overrightarrow{l_1} = a\vec{u}_1 + b\vec{v}_1 + c\vec{z}$ , montrer que l'on a nécessairement  $a = -\frac{R\dot{\theta}_1}{\dot{\beta}}$  et  $b = 0$  pour que la relation obtenue question précédente soit respectée.

**Q.7.** Montrer que l'axe  $(D_1)$  de la roue  $(S_1)$  passe par I, puis en déduire que l'axe  $(D_i)$  de la roue  $(S_i)$  passe par I.

On pose par la suite  $\overrightarrow{IC} = \rho\vec{x}$  et on note  $\overrightarrow{V_{C,S/R_0}} = V\vec{y}$  ( $\rho$  est le rayon du virage et  $V$  la vitesse du véhicule).

**Q.8.** A partir de  $\{\mathcal{V}_{S/R_0}^l\}$  exprimé en I, quelle relation simple existe-t'il entre  $V$  et  $\rho$  ?

**Q.9.** En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les vitesses de rotation  $\dot{\theta}_3$  et  $\dot{\theta}_4$  des deux roues arrières  $(S_3)$  et  $(S_4)$  en fonction de  $\rho$ ,  $R$ ,  $d$  et  $V$ . Que constate-t-on ?

**Q.10.** En déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu arrière pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_3$  et  $I_4$ .

On considère que le véhicule roule à 90 km/h, les roues ont pour diamètre 80cm et le virage décrit une courbe telle que la vitesse angulaire du véhicule  $\dot{\beta} = 0,1$  rad/s. On donne  $d = 1$  m.

**Q.11.** Déterminer graphiquement sur le document réponse 1, les vitesses des roues  $S_1, S_2, S_3, S_4$  en  $I_1, I_2, I_3, I_4$ . Utiliser une échelle judicieuse pour les vitesses et justifier les constructions.

**Q.12.** Que constate-t-on sur les roues avant et en déduire une condition technologique à assurer sur l'essieu avant pour que les conditions de roulement sans glissement soient respectées en  $I_1$  et  $I_2$ .

### Manège de fête foraine : « La chenille » améliorée

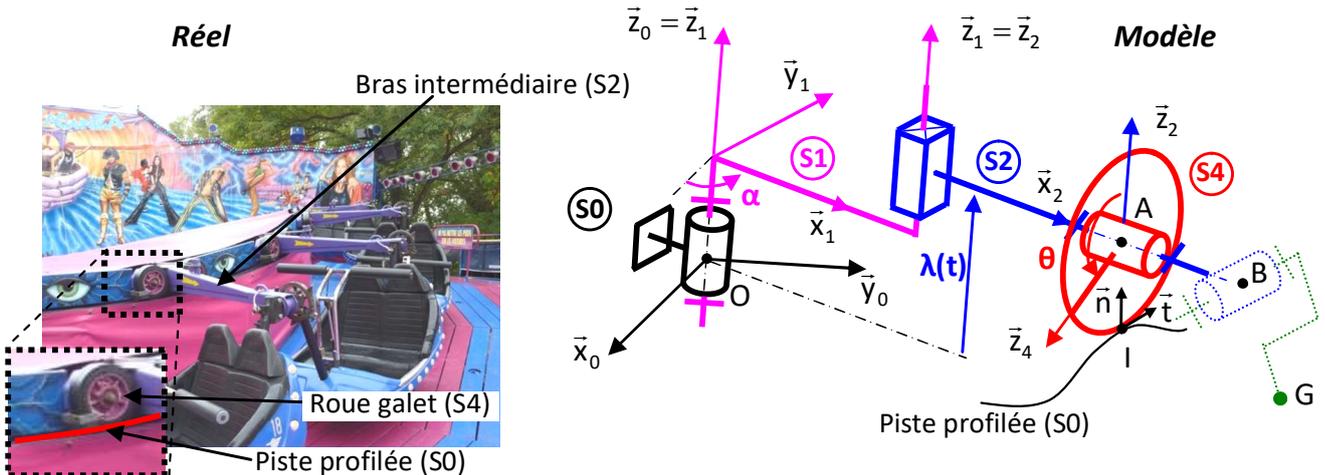
On s'intéresse dans ce problème à un manège rencontré dans les fêtes foraines, inspiré du manège communément appelé « la chenille » et qui est une version améliorée pour plus de sensations fortes.

Ce type d'attraction permet de procurer des sensations importantes aux passagers, à la fois en marche avant et en arrière par un mouvement de « brassage ». L'ensemble tourne à une vitesse maximale de 14 tours/min. Les voitures sont suspendues par le haut et peuvent basculer de gauche à droite à chaque dos d'âne. Au plus haut de ces bosses, les nacelles se retournent quasiment « à l'envers ».



Exigences	Critères	Niveaux
Le système doit respecter les exigences techniques suivantes	... Valeur maximale l'accélération reçue par un passager d'une masse de 70 kg pour un angle $\beta = \text{cte} = \pi/2$ et une accélération radiale $\ddot{\lambda} = 1,6\text{m/s}^2$ . ...	... 2g maximum

On s'intéresse au lien entre la translation verticale  $\lambda(t)$  et la rotation du manège  $\alpha$ . La translation verticale du bras intermédiaire (S2) est en fait obtenue par l'intermédiaire de roues qui roulent sur une piste profilée fixe et liée au solide (S0). On donne sur la figure suivante, le modèle cinématique correspondant :



La roue (S4) est en liaison pivot autour de l'axe  $(A, \vec{x}_2)$  avec le bras (S2) et roule sur la piste au point de contact noté I. On note  $\theta = (\vec{z}_2, \vec{z}_4) = (\vec{y}_2, \vec{y}_4)$  l'angle de rotation de la roue.

On pose  $\vec{n}$  la normale à la surface de contact et  $\vec{t}$  la tangente au contact. On note  $\gamma = (\vec{z}_1, \vec{n}) = (\vec{y}_1, \vec{t})$  l'angle entre la normale au contact et la verticale.

On pose également  $\vec{OA} = \lambda(t) \cdot \vec{z}_0 + L \cdot \vec{x}_1$  et  $\vec{IA} = R \cdot \vec{n}$  .

**Q.1.** Déterminer les torseurs cinématiques  $\{v_{S1/S0}^l\}$ ,  $\{v_{S2/S1}^l\}$  et  $\{v_{S4/S2}^l\}$  respectivement aux points O, A et A.

**Q.2.** Calculer la vitesse  $\vec{V}_{I,S4/S2}$  .

**Q.3.** Déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{V}_{I,S2/S0}$  en fonction de  $\dot{\lambda}(t)$ , R,  $\dot{\alpha}$ ,  $\gamma$  et L.

**Q.4.** Définir et déterminer la vitesse de glissement au point de contact I entre la roue galet (S4) et la piste profilée liée au bâti (S0).

**Q.5.** Quelle relation a-t-on nécessairement sur cette vitesse de glissement si on considère qu'il n'y a **pas de décolllement** entre la roue galet (S4) et la piste profilée (S0) ?

**Q.6.** En déduire de cette condition de non décolllement que  $\ddot{\lambda} = L \dot{\alpha} \cdot \tan \gamma$  .

**Q.7.** Peut-on avoir roulement sans glissement au point I ? Donner un cas particulier pour la forme de la piste qui permet d'utiliser cette hypothèse puis commenter le mouvement du manège dans ce cas particulier.

**Q.8.** Dans le cas où il y aurait roulement sans glissement, déterminer la relation entre  $\dot{\theta}$  et  $\dot{\alpha}$  .

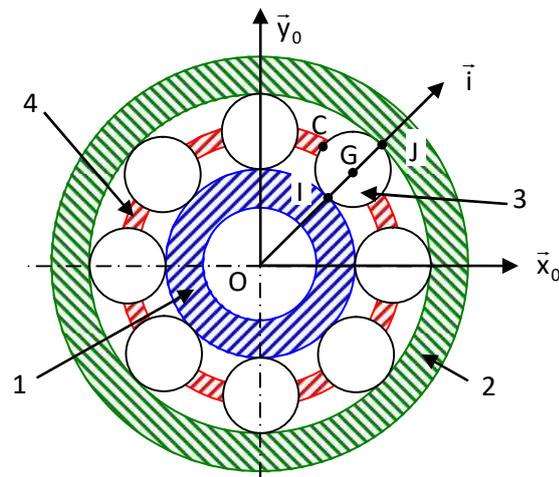
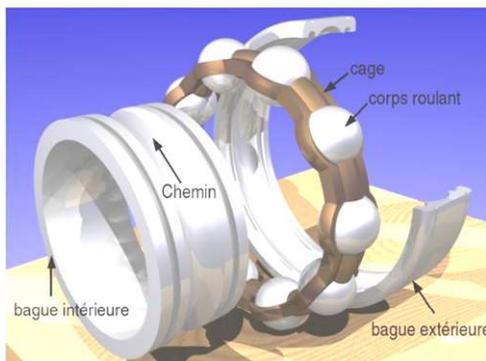
**Q.9.** La piste possède un profil sinusoïdal. On a alors  $\vec{OI} = L \cdot \vec{x}_1 + e \cdot \vec{y}_1 + z_0 \cdot \cos \alpha \cdot \vec{z}_1$  . Quelle est dans ce cas la trajectoire du point A (point au centre de la roue) ? En déduire l'expression en fonction de  $z_0$ ,  $\dot{\alpha}$  et  $\alpha$  de la projection sur la direction  $\vec{z}_0$  de la vitesse  $\vec{V}_{A,S2/S0}$  .

## Roulement à billes

Un roulement mécanique est un élément technologique permettant le positionnement, la transmission des efforts et la rotation entre deux pièces par roulement. Ce composant mécanique interposé entre les deux pièces optimise le frottement et la précision de la liaison. Un roulement à billes se présente sous la forme de deux bagues coaxiales entre lesquelles sont placées des billes maintenues espacées par une cage. La fonction de la cage est donc de maintenir deux billes consécutives à distance égale l'une de l'autre lors du fonctionnement du roulement mais elle entraîne aussi des effets nuisibles car il existe un phénomène de glissement entre la cage et les billes. L'objectif est d'étudier ce phénomène de glissement.

On désigne par :

- $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$  le repère associé au bâti 0.
- $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z}_0)$  le repère associé à la bague intérieure 1 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti 0 tel que  $\theta_1 = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ .
- $R_2(O, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2 = \vec{z}_0)$  le repère associé à la bague extérieure 2 en liaison pivot d'axe  $(O, \vec{z}_0)$  avec le bâti 0 tel que  $\theta_2 = (\vec{x}_0, \vec{x}_2) = (\vec{y}_0, \vec{y}_2)$ .
- $R_3(G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3 = \vec{z}_0)$  le repère associé à la bille 3 qui roule sans glisser sur 1 en I et sur 2 en J et dont on peut considérer qu'elle est en liaison pivot d'axe  $(G, \vec{z}_0)$  avec la cage 4 tel que  $\theta_3 = (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3)$ .
- $R_4(O, \vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4 = \vec{z}_0)$  le repère associé à la cage 4 en mouvement de rotation autour de  $(O, \vec{z}_0)$  tel que  $\theta_4 = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{y}_0, \vec{y}_4)$ .



Pour faciliter les calculs on définit le repère  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{z}_0)$  tel que, à tout instant, le vecteur  $\vec{i}$  possède la même direction et le même sens que le vecteur  $\vec{OG}$ . Ce repère n'est lié à aucun solide en particulier et ne sert qu'à exprimer simplement les différents termes cinématiques évoqué dans l'énoncé. On pose :

$$\omega_k = \dot{\theta}_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \qquad \vec{OI} = r_1 \cdot \vec{i} \qquad \vec{OJ} = r_2 \cdot \vec{i} \qquad \vec{GC} = \frac{1}{2} \cdot (r_2 - r_1) \cdot \vec{j}$$

**Q.1.** Déterminer le torseur cinématique  $\{U_{1/0}\}$  au point O puis au point I. Déterminer le torseur cinématique  $\{U_{2/0}\}$  au point O puis au point J.

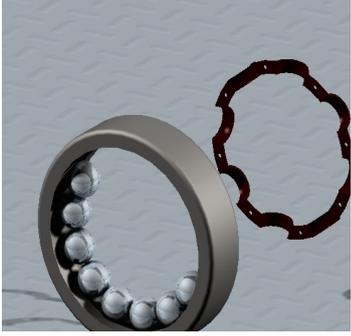
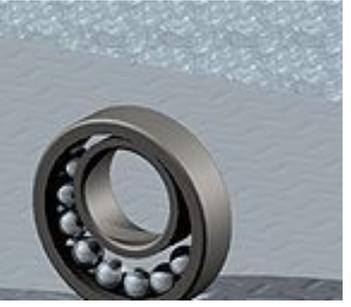
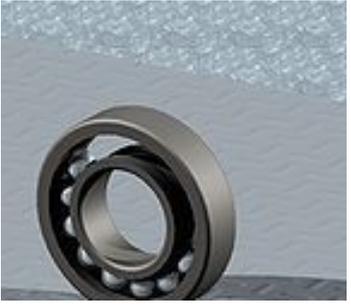
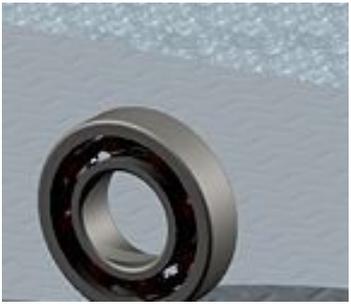
**Q.2.** Exprimer les conditions de roulement sans glissement en I et en J. Etablir les expressions des vecteurs  $\vec{V}_{I \in 3/0}$  et  $\vec{V}_{J \in 3/0}$ .

**Q.3.** En déduire l'expression de  $\omega_3$  en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1$  et  $\omega_2$ .

**Q.4.** Déterminer  $\vec{V}_{G \in 3/0}$  en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1$  et  $\omega_2$ .

**Q.5.** Déterminer l'expression de la vitesse de glissement de la bille 3 par rapport à la cage 4 au point C en fonction de  $r_1, r_2, \omega_1$  et  $\omega_2$ .

**Un peu de culture technique : Etapes d'assemblage d'un roulement rigide à une rangée de billes.**

	<p>Les billes sont disposées jointives sur le chemin de roulement de la bague extérieure. Leur espacement final sera garanti par la cage (demi-cage en arrière plan).</p>
	<p>On peut alors engager la bague intérieure. Le nombre d'éléments roulants est en partie limité par cette contrainte de montage. Trop nombreux la bague ne peut pas entrer, le montage n'est donc pas possible, même si en position théorique finale les pièces semblent avoir assez de place !</p>
	<p>La bague intérieure se centre naturellement par appui sur les billes en s'engageant radialement dans l'arc qu'elles forment. L'amplitude de cet arc est limitée de telle sorte que la bague intérieure puisse effectivement se mettre en place (limitation encore une fois du nombre de billes).</p>
	<p>Les billes sont enfin écartées pour prendre la répartition circulaire finale correspondant à la cage de roulement.</p>
	<p>Les deux parties de la cage sont rapportées de part et d'autre puis assemblées par rivetage, collage, ou soudage suivant les tailles, les qualités ou les constructeurs.</p>