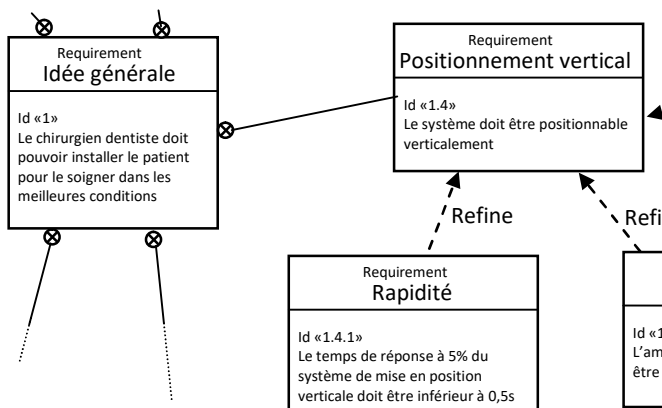


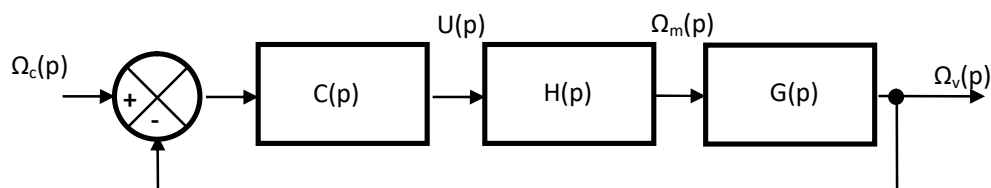
Etude de l'asservissement d'une unité dentaire

Le support de l'étude est une « unité dentaire » dont on donne un extrait partiel du diagramme des exigences de son modèle ainsi qu'une description structurale du système. Cet équipement a été conçu et réalisé dans le but d'une adaptabilité maximale aux différentes méthodes de travail des chirurgiens dentistes. Le chirurgien dentiste possède une pédale et un pupitre de commande qui lui permet de monter ou descendre verticalement le corps du patient, de l'incliner plus ou moins et de positionner sa tête. Grâce à cela, le patient peut prendre une position pertinente pour que le chirurgien puisse réaliser tous les actes médicaux.



On s'intéresse dans ce sujet au critère de l'exigence 1.4.1 concernant le temps de réponse du système permettant de mettre en position verticale le patient. Le travail proposé porte sur la comparaison de deux solutions techniques pour réaliser le correcteur $C(p)$ du système de positionnement vertical. Le comportement temporel du système avec chacune de ces solutions sera analysé vis-à-vis du critère de l'exigence 1.4.1.

Pour régler le patient en position verticale, le chirurgien dentiste appuie sur une pédale, plus ou moins fort. Un moteur électrique se met en route, sa vitesse de rotation dépendant de l'appuie plus ou moins profond du chirurgien dentiste sur la pédale. La vitesse de rotation du moteur est réduite par un réducteur à engrenages. En sortie du réducteur à engrenages se trouve une vis, dont la rotation $\Omega_v(p)$ entraîne, par un système vis écrou, la translation du siège en hauteur. L'ensemble peut se représenter par le schéma bloc simplifié à retour unitaire suivant (le bloc de fonction de transfert $C(p)$ correspond alors à la fonction de transfert du correcteur multipliée par le gain du capteur) :



Q.1. Donner le nom des composants qui correspondent aux fonctions de transfert $H(p)$ et $G(p)$.

Q.2. Déterminer la fonction de transfert en boucle fermée du système : $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)}$

Les équations du moteur utilisé sont les suivantes :

$$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad e(t) = k_e \cdot \omega_m(t) \quad J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) - f \cdot \omega_m(t) \quad C_m(t) = k_m \cdot i(t)$$

Avec : $u(t)$ = tension du moteur ; $e(t)$ = force contre électromotrice du moteur ; $i(t)$ = intensité dans le moteur ; $C_m(t)$ = couple exercé par le moteur ; $\omega_m(t)$ = vitesse angulaire du moteur. Les grandeurs physiques R , L , k_e , J , f et k_m sont des constantes.

Q.3. En supposant les conditions initiales nulles (ce qui sera également supposé dans tout le reste de l'exercice), exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.

Q.4. Montrer que, dans le domaine de Laplace, la relation entre $\Omega_m(p)$ et $U(p)$ peut s'écrire sous la forme : $\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K}{(1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$ où K , z et ω_0 sont trois constantes à déterminer.

Si on utilise un correcteur proportionnel, l'application numérique des grandeurs physiques permet de trouver la fonction de transfert simplifiée suivante : $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{K_T}{1 + T_T \cdot p}$, avec $K_T=0,9$ et $T_T=0,1s$

Q.5. Déterminer $\omega_v(t)$ lorsque le chirurgien dentiste demande un échelon de rotation $\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$. Exprimer le résultat en fonction de ω_{c0} , K_T et T_T .

Q.6. Déterminer le temps de réponse à 5% du système et effectuer l'application numérique.

Le patient, initialement immobile, bouge verticalement selon le déplacement $x_v(t)$ tel que : $\frac{dx_v(t)}{dt} = a \cdot \omega_v(t)$ avec a = constante qui représente le pas réduit de la vis.

Q.7. Déterminer la transformée de Laplace $X_v(p)$ de $x_v(t)$.

Q.8. Déterminer $x_v(t)$ en fonction de a , K_T et T_T et ω_{c0} .

Si on utilise un correcteur proportionnel, dérivé et intégral, l'application numérique des grandeurs physiques permet de trouver la fonction suivante : $\frac{\Omega_v(p)}{\Omega_c(p)} = \frac{1}{1 + 2 \cdot p + p^2}$

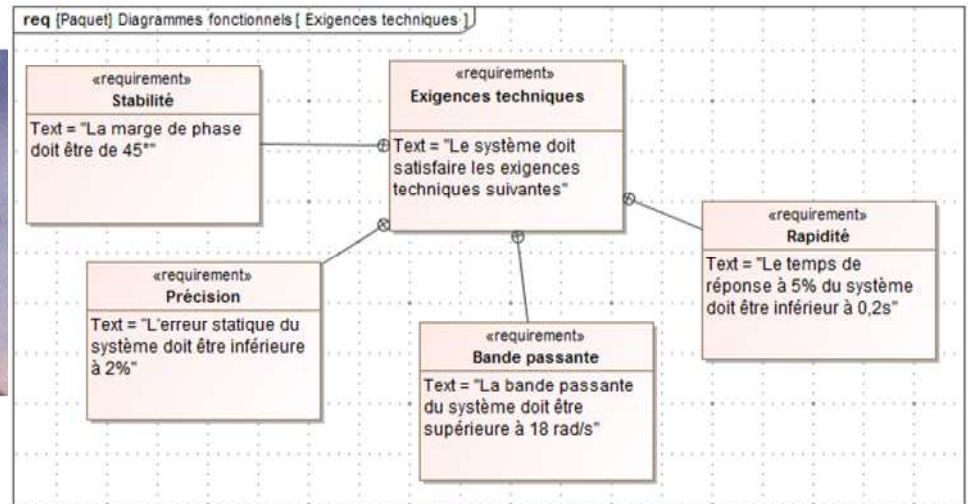
Q.9. Déterminer $\omega_v(t)$ lorsque le chirurgien dentiste demande un échelon de rotation $\omega_c(t) = \omega_{c0} \cdot u(t)$.

Q.10. Comparer la rapidité du système muni du correcteur proportionnel, avec la rapidité du système muni du correcteur proportionnel intégral dérivé.

Q.11. Réaliser un graphe de synthèse présentant les résultats obtenus ainsi que l'évaluation de l'écart entre performances attendues et performances simulées puis conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Radar d'avion

Le support d'étude est un radar d'avion dont on donne une description structurale ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. Ce système permet notamment au pilote de détecter des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...) et de connaître leur position. L'objectif de cette étude est de vérifier si l'asservissement proposé ici **en phase de conception** est compatible aux performances attendues par le client.



La solution proposée est un asservissement de position angulaire du radar : l'angle souhaité est $\theta_c(t)$, l'angle réel du radar est $\theta_r(t)$. Le capteur de gain K_{capt} délivre une image en volt $u_{\text{capt}}(t)$ de l'angle du radar et un bloc d'adaptation de gain K_a permet d'obtenir l'image en volt $u_c(t)$ de l'angle de consigne. La différence des images des deux angles est transformée en une tension $u_m(t)$, selon la loi $u_m(t) = A.(u_c(t) - u_{\text{capt}}(t))$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur, une vitesse angulaire $\omega_m(t)$. Cette vitesse angulaire est réduite grâce à un réducteur de vitesse selon la relation $\omega_r(t) = B.\omega_m(t)$ ($B < 1$), $\omega_r(t)$ étant la vitesse angulaire du radar.

On donne la relation $\omega_r(t) = \frac{d}{dt} \theta_r(t)$ et on note $H_m(p)$ la fonction de transfert du moteur.

Q.1. Réaliser le modèle en schéma-bloc du système. Donner la relation entre K_a et K_{capt} pour que le système soit bien asservi. Manipuler enfin le schéma bloc pour le ramener à un schéma à retour unitaire.

Les équations du moteur à courant continu, qui est utilisé dans la motorisation, sont les suivantes :

$$u_m(t) = e(t) + R.i(t) \quad e(t) = k_e.\omega_m(t) \quad J.\frac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t) \quad C_m(t) = k_m.i(t)$$

avec :

$u(t)$: tension aux bornes du moteur (en V) (entrée du moteur)

$e(t)$: force contre-électromotrice (en V)

$i(t)$: intensité (en A)

$\omega_m(t)$: vitesse de rotation du moteur (en rad/s)

$C_m(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner)

J : inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur (en kg.m^2)

R : résistance électrique du moteur (en Ω)

k_e : constante de force contre-électromotrice (en $\text{V}/(\text{rad/s})$)

k_m : constante de couple (en N.m/A)

Q.2. Déterminer la fonction de transfert $H_m(p) = \frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}$.

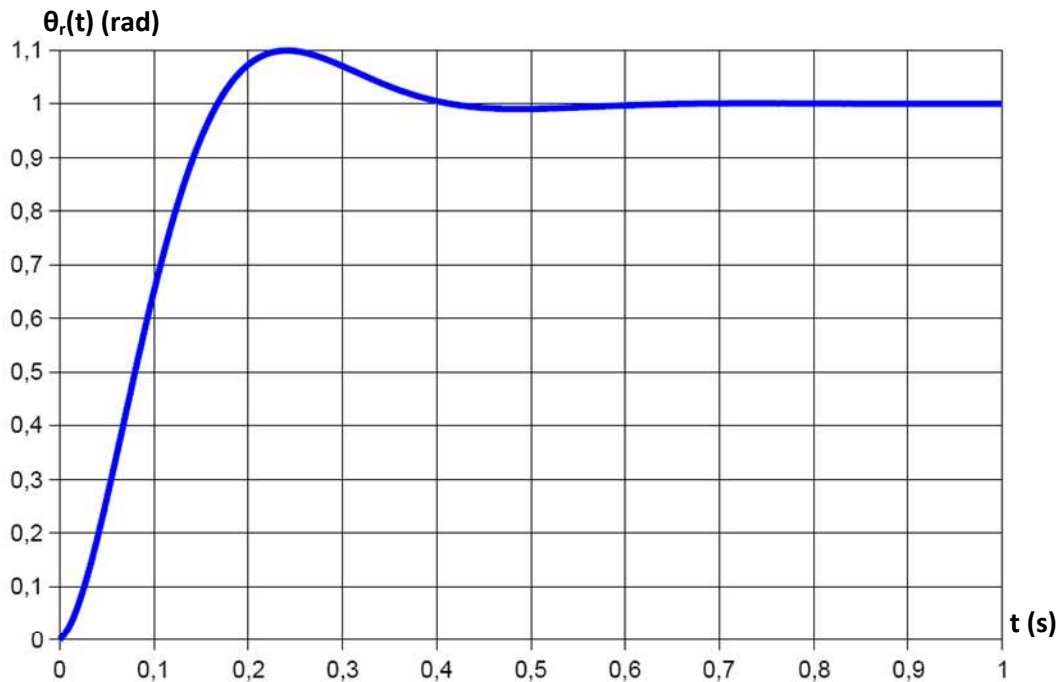
Q.3. Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique $H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m.p}$ et déterminer les valeurs littérales de K_m et T_m .

Q.4. Déterminer $\omega_m(t)$ lorsque $u_m(t)$ est un échelon de tension d'amplitude u_0 . Exprimer le résultat en fonction de K_m , T_m et u_0 . Préciser la valeur de $\omega_m(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_m(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_m(t)$ quand t tend vers l'infini.

Q.5. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la

forme $\frac{K}{(1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$. Déterminer les constantes K , z et ω_0 en fonction de K_m , T_m , A , B et K_{capt} .

La réponse à un échelon unitaire (réponse indicielle) obtenue à partir d'une simulation du système de fonction de transfert $H(p)$ est donnée sur la figure suivante :

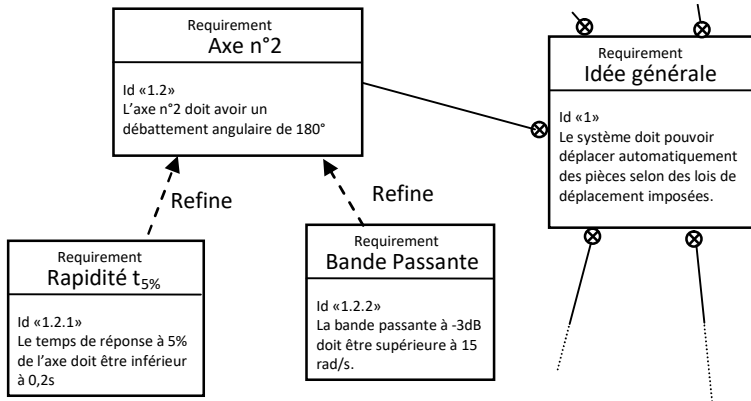


Q.6. Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

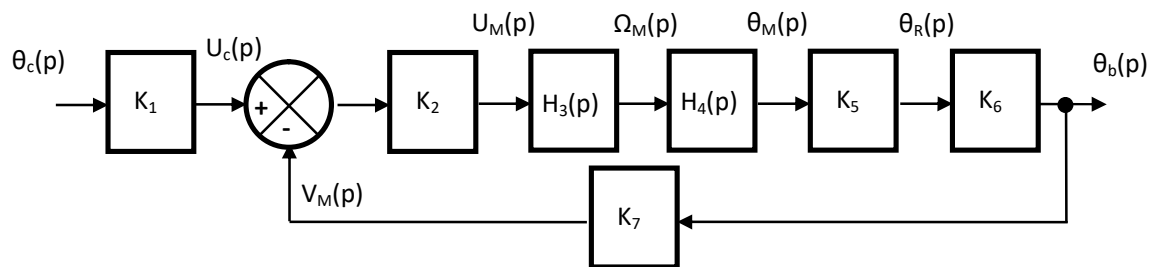
Q.7. Déterminer le temps de réponse à 5%. Conclure quant la capacité du système proposé par le bureau d'étude à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

Robot préhenseur de pièces

On s'intéresse à un robot préhenseur de pièces dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait partiel du diagramme des exigences de son modèle SysML. L'objectif de cette étude est de vérifier les performances d'un des axes asservis de ce robot vis-à-vis des critères de performances attendus.



On donne ci-dessous le modèle de l'asservissement de position angulaire de l'axe du bras étudié sous la forme d'un schéma bloc (l'angle réel du bras est $\theta_b(t)$, l'angle de consigne est $\theta_c(t)$).



Avec : K_1, K_2, K_5, K_6, K_7 : constantes, $\theta_c(p)$: angle de consigne, $U_c(p)$: tension consigne, $U_M(p)$: tension moteur, $\Omega_M(p)$: vitesse angulaire de l'arbre moteur, $\theta_M(p)$: angle de l'arbre moteur, $\theta_R(p)$: angle de l'arbre en sortie de réducteur, $\theta_b(p)$: position angulaire du bras, $V_M(p)$: tension mesurée image de $\theta_b(p)$.

Q.1. Déterminer le lien entre K_1 et K_7 pour que $\theta_b(p)$ soit asservi sur $\theta_c(p)$.

La fonction de transfert $H_3(p)$ est réalisée par un moteur, dont le modèle de connaissance est le suivant :

$$u_M(t) = e(t) + R \cdot i(t) \quad e(t) = k_e \cdot \omega_M(t) \quad J \cdot \frac{d\omega_M(t)}{dt} = C_M(t) \quad C_M(t) = k_M \cdot i(t)$$

Avec : $u_M(t)$: tension aux bornes du moteur (en V), $e(t)$: force contre-électromotrice (en V), $i(t)$: intensité (en A), $\omega_M(t)$: vitesse de rotation de l'arbre en sortie de moteur (en rad/s), $C_M(t)$: couple moteur (en N.m) (un couple est une action mécanique qui tend à faire tourner), J : inertie équivalente en rotation de l'arbre moteur (en kg.m²), R : résistance électrique du moteur (Ω), k_e : constante de force contre-électromotrice (V.rad⁻¹.s), k_M : constante de couple (N.m.A⁻¹).

Q.2. Déterminer la fonction de transfert $H_3(p) = \frac{\Omega_M(p)}{U_M(p)}$. Montrer que $H(p)$ peut se mettre sous la forme

canonique $H_3(p) = \frac{K_3}{(1 + T_3 \cdot p)}$ et déterminer les valeurs littérales K_3 et T_3 .

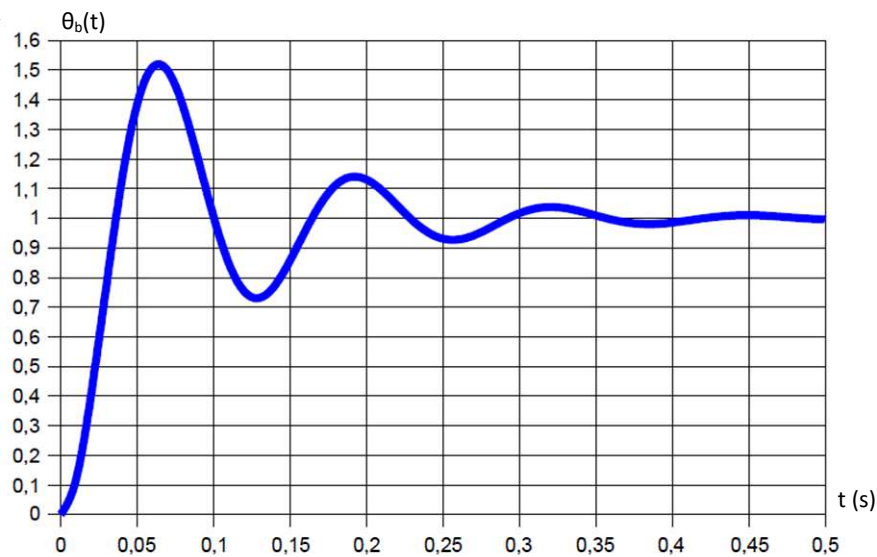
Q.3. Déterminer $\omega_M(t)$ lorsque $u_M(t)$ est un échelon de tension d'amplitude U_0 . Préciser la valeur de $\omega_M(t)$ à l'origine, la pente de la tangente à l'origine de $\omega_M(t)$ et la valeur finale atteinte par $\omega_M(t)$ quand t tend vers l'infini.

Q.4. Déterminer la fonction de transfert $H_4(p)$.

Q.5. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_b(p)}{\theta_c(p)}$. Montrer que cette fonction peut se mettre sous la forme

$$H(p) = \frac{K}{\left(1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2\right)} \text{ et déterminer les valeurs littérales } K, z \text{ et } \omega_0 \text{ en fonction des constantes fournies.}$$

La réponse indicielle de $H(p)$ à un échelon unitaire, obtenue à l'aide d'un logiciel de simulation, est donnée sur la figure suivante :



Q.6. Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, les valeurs numériques de K , z et ω_0 .

Q.7. Déterminer, en expliquant la démarche utilisée, la valeur numérique du critère qui permet de vérifier l'exigence 1.2.1. du système.

Q.8. Réaliser un graphe de synthèse présentant les résultats obtenus ainsi que l'évaluation de l'écart entre performances attendues et performances simulées puis conclure vis-à-vis des exigences du cahier des charges.

Etude des performances de rouleaux d'impression d'imprimerie

(D'après concours Centrale Supélec MP)

On s'intéresse à un dispositif d'imprimerie dont on donne une description structurale ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel.

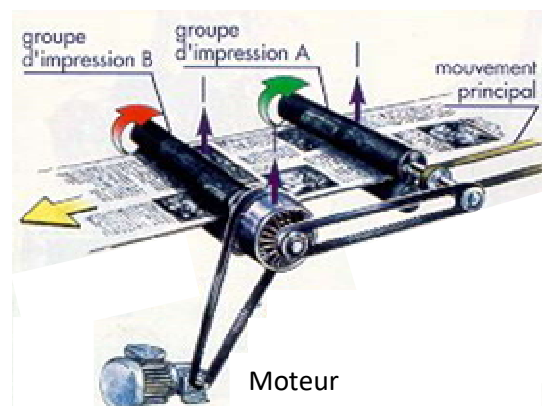
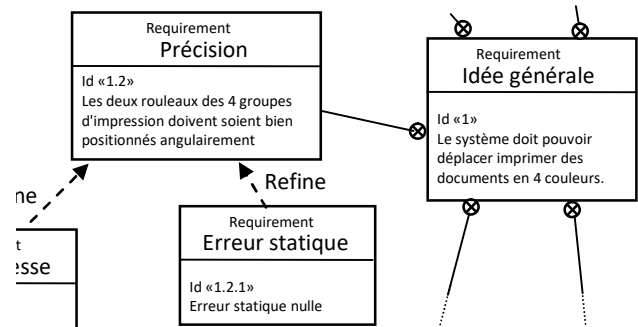
Pour obtenir une impression graphique en couleurs, il faut faire passer une feuille de papier entre 4 groupes d'impression. Il est donc absolument nécessaire que les rouleaux des groupes d'impression soient bien positionnés angulairement, sinon les couleurs ne se superposent pas au même endroit sur la feuille.

Pour régler la position relative des rouleaux, on utilise un moteur qui recale leur rotation.

Le comportement du moteur est modélisé par les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} u(t) &= e(t) + R \cdot i(t) & e(t) &= k_e \cdot \omega_m(t) \\ J \cdot \frac{d\omega_m(t)}{dt} &= C_m(t) & C_m(t) &= k_m \cdot i(t) \end{aligned}$$

Avec : $u(t)$ = tension du moteur ; $e(t)$ = force contre électromotrice du moteur ; $i(t)$ = intensité dans le moteur ; $C_m(t)$ = couple exercé par le moteur ; $\omega_m(t)$ = vitesse angulaire du moteur.



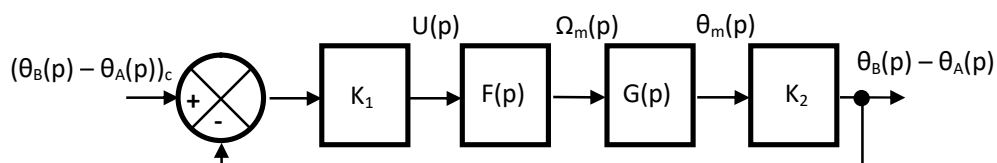
Q.1. En supposant les conditions initiales nulles (ce qui sera également supposé dans tout le reste de l'exercice), exprimer ces équations dans le domaine de Laplace.

Q.2. Montrer que, dans le domaine de Laplace, la relation entre $\Omega_m(p)$ et $U(p)$ peut s'écrire sous la forme : $\frac{\Omega_m(p)}{U(p)} = \frac{K_m}{1 + T_m \cdot p}$ où K_m et T_m sont deux constantes à déterminer.

Q.3. Déterminer $\omega_m(t)$ lorsque le moteur est soumis à un échelon de tension d'amplitude u_0 . Exprimer et justifier le résultat en fonction de K et T .

Q.4. Déterminer le temps de réponse à 5% de ce moteur.

Après manipulation, le schéma bloc du système avec les deux groupes d'impression peut se mettre sous la forme simplifiée suivante :



K_1 et K_2 sont deux constantes. $\theta_A(p)$ et $\theta_B(p)$ sont les rotations des deux rouleaux des groupes d'impression. L'indice C à l'entrée du schéma-bloc correspond à la consigne que l'on souhaite atteindre.

On rappelle le lien entre un angle $\theta_i(t)$ et la vitesse angulaire $\omega_i(t)$ correspondante : $\omega_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt}$

Q.5. Déterminer la fonction $G(p)$.

Q.6. Déterminer la fonction de transfert $H(p) = \frac{\theta_B(p) - \theta_A(p)}{(\theta_B(p) - \theta_A(p))_c}$.

Q.7. Montrer que la fonction de transfert $\frac{\theta_B(p) - \theta_A(p)}{(\theta_B(p) - \theta_A(p))_c}$ se met sous la forme $\frac{K_3}{(1 + \frac{2z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2)}$ où K_3 , z et ω_0 sont trois constantes à déterminer.

Q.8. Après application numérique, on obtient $K_3=1$, $z=1$ et $\omega_0=1$. Préciser les unités de ces trois constantes et déterminer $\theta_B(t) - \theta_A(t)$ lorsque $(\theta_B(t) - \theta_A(t))_c$ est un échelon d'amplitude de 2 rad. Conclure quant à l'exigence de précision du cahier des charges.