Annexe TD 04 - Méthodes de décomposition en éléments simples des fonctions F(p)

Méthodes de décomposition en éléments simples des fonctions F(p)

F(p) se présente sous la forme $F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$ où N(p) et D(p) sont deux polynômes en p, tel que le degré de N(p) < degré de D(p) (sinon le système n'est pas causal).

- **Méthodes de décomposition pour des racines réelles** de D(p) :

→ **Racines simples** a, b, c… de D(p) :

On met $F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$ sous la forme : $\frac{A}{(p-a)}+\frac{B}{(p-b)}+\frac{C}{(p-c)}+...$

Ce qui permet de retrouver par « lecture » du tableau : $f(t)=A.e^{at}+B.e^{bt}+C.e^{ct}+.....$

Les coefficients A, B, C se calculent soit par identification en réduisant au même dénominateur, soit par exemple pour le coefficient B, en multipliant F(p) par p – b et en faisant tendre p vers b.

→ **Racines multiples** a, b, c… de D(p) :

On met $\frac{N(p)}{(p-a)^{\alpha}(p-b)^{\beta}...}$ sous la forme :

$$\frac{A_1}{(p-a)}+\frac{A_2}{(p-a)^2}+......+\frac{A_\alpha}{(p-a)^{\alpha}}+\frac{B_1}{(p-b)}+\frac{B_2}{(p-b)^2}+.....+\frac{B_\beta}{(p-a)^{\beta}}+....$$

Les coefficients se calculent soit par identification en réduisant au même dénominateur ou soit par exemple pour les coefficients du type A_α, en multipliant F(p) par $(p-a)^{\alpha}$ et en faisant tendre p vers a puis en déterminant les autres coefficients en donnant des valeurs réelles à p.

- Méthodes de **décomposition pour des racines complexes** de D(p) :

→ **Racines simples conjuguées** : $\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{N(p)}{(p^2+mp+n).(.....)}$

(p^2+mp+n) possède deux racines complexes conjuguées ($p_1=-a+j\omega$, $p_2=-a-j\omega$), (p^2+mp+n) peut se mettre sous la forme : $(p-p_1).(p-p_2)=(p+a)^2+\omega^2$

La méthode consiste simplement à mettre $F(p)=\frac{N(p)}{D(p)}$ sous la forme :

$$\frac{A_1p+B_1}{p^2+mp+n}+.....=\frac{A_1p+B_1}{(p+a)^2+\omega^2}+.....$$

f(t) s'exprime alors simplement en fonction de $e^{-at}\sin\omega t$ et/ou $e^{-at}\cos\omega t$

→ **Racines multiples conjuguées** : on utilise le même principe de décomposition que celui vu dans le cas de dénominateur avec des racines réelles multiples.