

Etude de la stabilité des systèmes asservis modélisés en SLCI

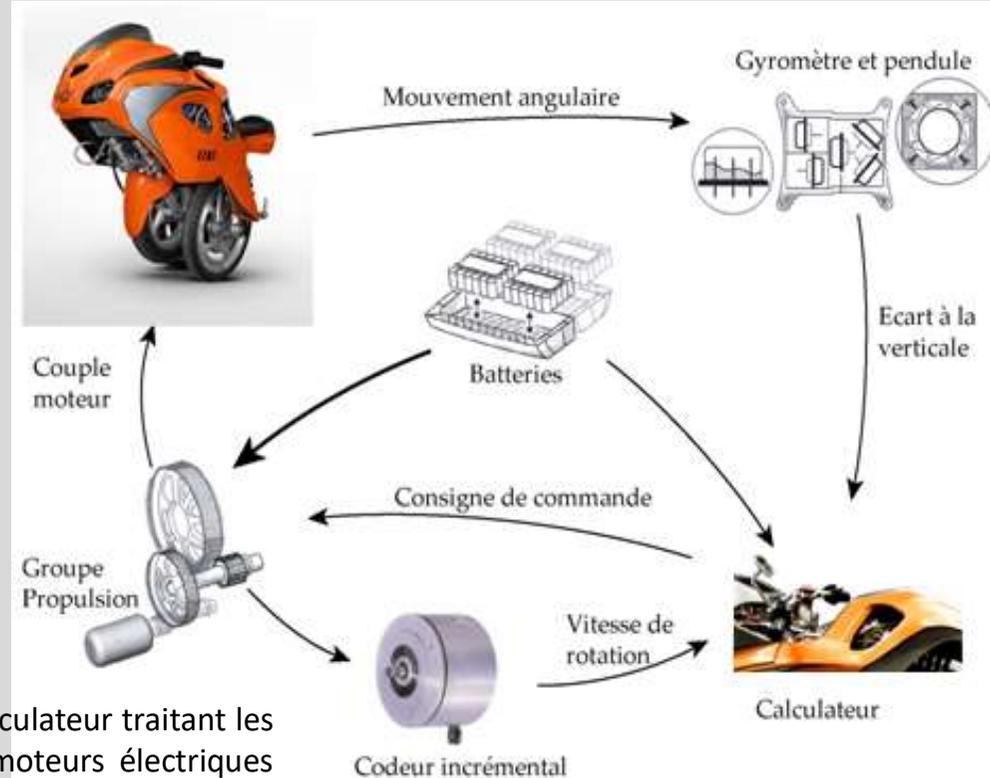


Uno I (Concept initial)



Uno III

Le scooter Uno III est un parfait exemple de système asservi qui doit être nécessairement stable pour un bon fonctionnement. L'équilibre du système est notamment obtenu grâce à un système gyroscopique couplé à un calculateur traitant les informations et transmettant les consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux groupes propulsion.



Exemple de système asservi

CONCEPT DU SCOOTER AUTOBALANCE



- 1. Définitions et problématique**
- 2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF**
- 3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO**
- 4. Causes d'instabilité**



1. Définitions et problématique

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO
4. Causes d'instabilité

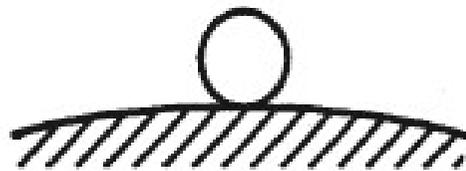
1. Définitions et problématique



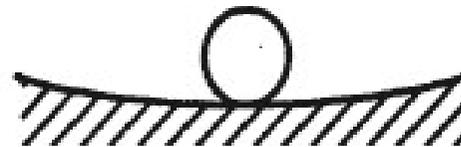
SII - F. MATHURIN

1.1. Stabilité – Définition générale

On dit qu'un système est stable si, écarté de sa position par une cause extérieure, il revient vers cette position lorsque la cause disparaît.



Systeme instable



Systeme stable

1. Définitions et problématique

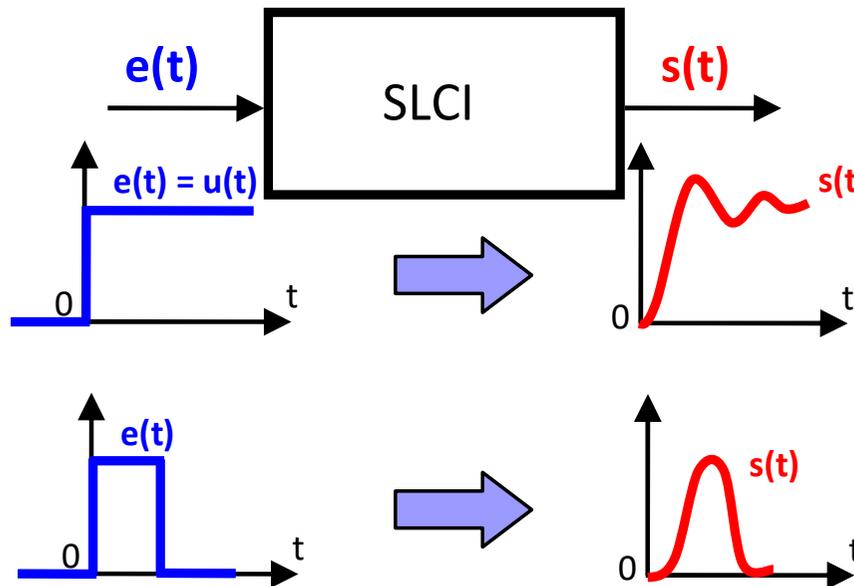


SII - F. MATHURIN

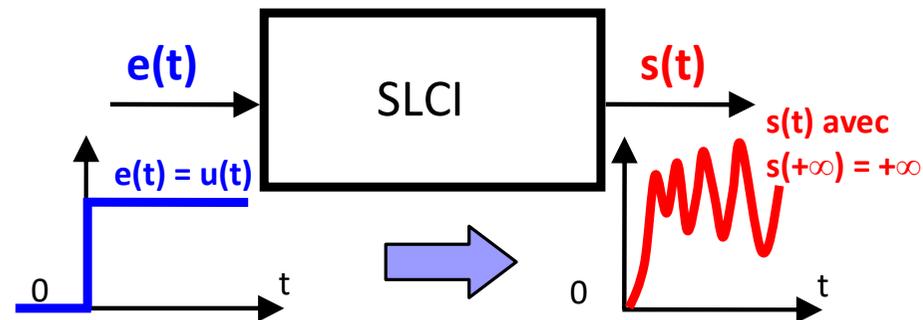
1.2. Stabilité – Définition adaptée aux SLCI

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.

Systeme stable



Systeme instable



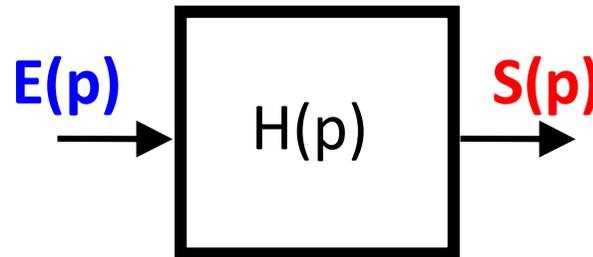
1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI - Définition

La stabilité d'un SLCI peut être déterminée uniquement à partir des pôles de sa fonction de transfert $H(p)$.



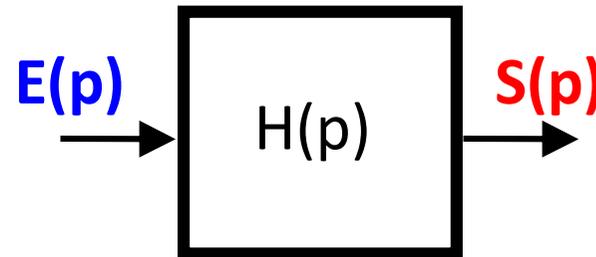
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_i) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$$

1. Définitions et problématique

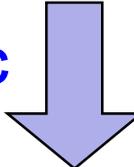


SII - F. MATHURIN

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI - Définition



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1) \cdot (p - p_2) \cdot \dots \cdot (p - p_i) \cdot \dots \cdot (p - p_n)}$$

Entrée = Dirac  + décomposition en éléments simples

$$S(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p - p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$$

1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI - Définition

$$S(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p - p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$$

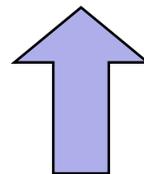
1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI - Définition

$$s(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + A_i \cdot e^{p_i \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t}$$



Transformée Laplace inverse

$$S(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p - p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$$

1. Définitions et problématique



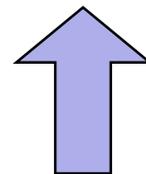
SII - F. MATHURIN

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI - Définition

2 configurations :

- soit c'est un pôle réel

$$s(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + A_i \cdot e^{p_i \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t}$$



Transformée Laplace inverse

$$S(p) = \frac{A_1}{(p - p_1)} + \frac{A_2}{(p - p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p - p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p - p_n)}$$

1. Définitions et problématique



SII - F. MATHURIN

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI - Définition

2 configurations :

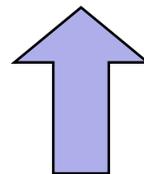
- soit c'est un pôle réel

- soit c'est un pôle complexe conjugué

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha + j.\omega \\ p_2 &= \alpha - j.\omega \end{aligned}$$

$$s(t) = A_1.e^{(\alpha+j.\omega).t} + A_2.e^{(\alpha-j.\omega).t} = \mu.e^{\alpha t}.\sin(\omega.t + \varphi)$$

$$s(t) = A_1.e^{p_1.t} + A_2.e^{p_2.t} + \dots + A_i.e^{p_i.t} + \dots + A_n.e^{p_n.t}$$



Transformée Laplace inverse

$$S(p) = \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p-p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p-p_n)}$$

1. Définitions et problématique



SII - F. MATHURIN

1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI - Définition

2 configurations :

- soit c'est un pôle réel

- soit c'est un pôle complexe conjugué

$$p_1 = \alpha + j.\omega$$

$$p_2 = \alpha - j.\omega$$

$$s(t) = A_1.e^{(\alpha+j.\omega).t} + A_2.e^{(\alpha-j.\omega).t} = \mu.e^{\alpha t}.\sin(\omega.t + \varphi)$$

$$s(t) = A_1.e^{p_1.t} + A_2.e^{p_2.t} + \dots + A_i.e^{p_i.t} + \dots + A_n.e^{p_n.t}$$

Un Système Linéaire Continu Invariant est stable ssi sa fonction de transfert possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

Application exos 1 et 2 TD 31

TD 31 - Sciences Industrielles pour l'Ingénieur Lycée Fermat Toulouse - CPGE MPSI/PCSI

Réponses de systèmes à l'impulsion de DIRAC

On donne ci-dessous des réponses à l'impulsion de Dirac de plusieurs systèmes.

Q.1. Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou marginalement stable.

Stabilité à partir des pôles de la FTBF

On donne ci-dessous les pôles des FTBF de plusieurs systèmes. Pour chaque cas déterminer si le système est stable, instable ou marginalement stable.

Système 1 : -1 ; -2	Système 4 : -2+3j, -2-3j, -2	Système 7 : -1+j, -1-j
Système 2 : -3, -2, 0	Système 5 : -j, j, -1, 1	Système 8 : 2, -1, -3
Système 3 : -2+j, -2-j, 2j, -2j	Système 6 : -1, +1	Système 9 : -6, -4, 7

Application du critère de Routh

On donne le schéma bloc modélisant un système asservi. Déterminer l'expression du gain permettant d'obtenir un système stable.

Application du critère de Routh

On donne les FTBO de 3 systèmes asservis en retour unitaire. Déterminer, à l'aide du critère de Routh, si les systèmes sont stables en boucle fermée et donner les valeurs de K admissibles.

$$G_1(p) = \frac{K}{p \cdot (p+3) \cdot (p+4)}$$

$$G_2(p) = \frac{K \cdot (1+T \cdot p)}{p \cdot (p+1) \cdot (1+0,5 \cdot p)}$$

$$G_3(p) = \frac{K}{p^2 + 5p^2 + 8p + 5}$$

Page 1 sur 12

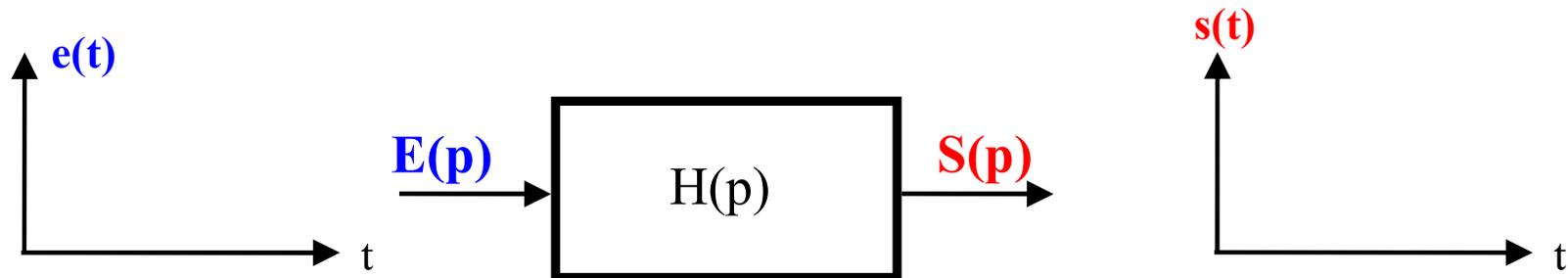
1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

Soit un système en boucle ouverte :



1. Définitions et problématique

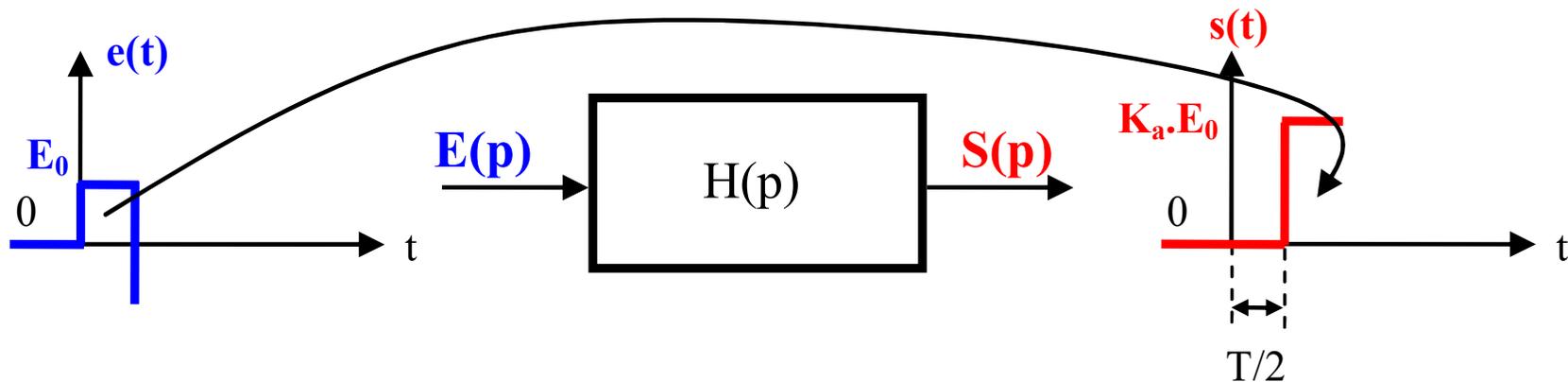


SII - F. MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

Soit un système en boucle ouverte :

Déphasage de $T/2$ du signal + amplification de K_a



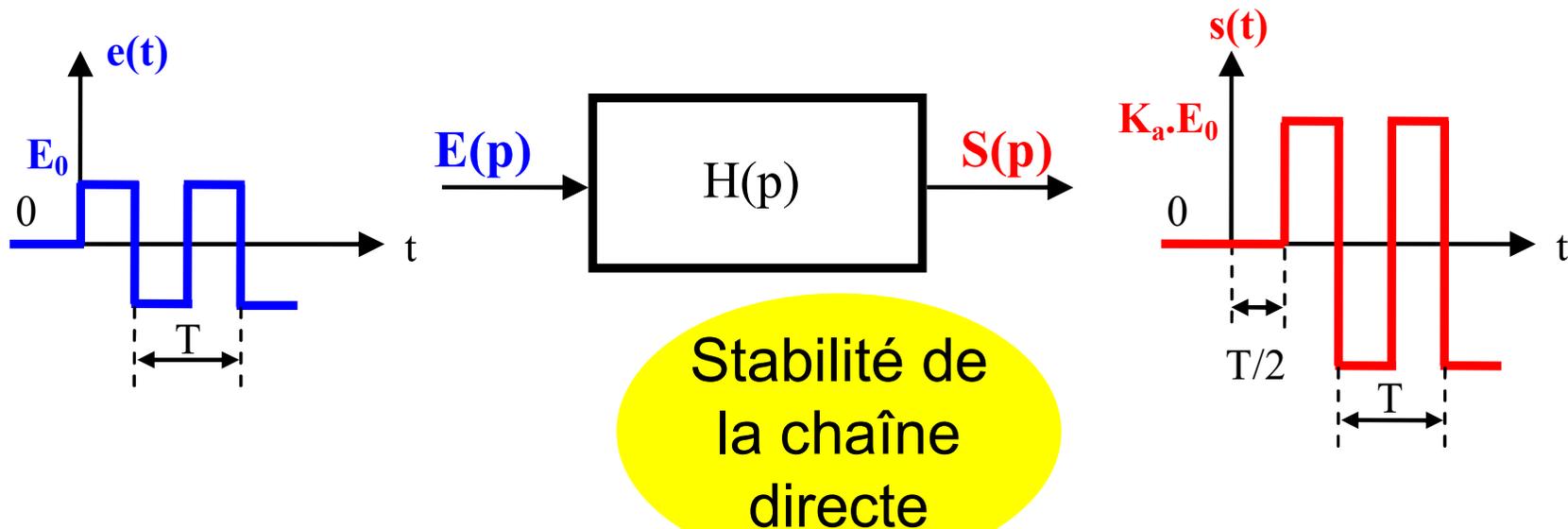
1. Définitions et problématique



SII - F. MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

Soit un système en boucle ouverte :



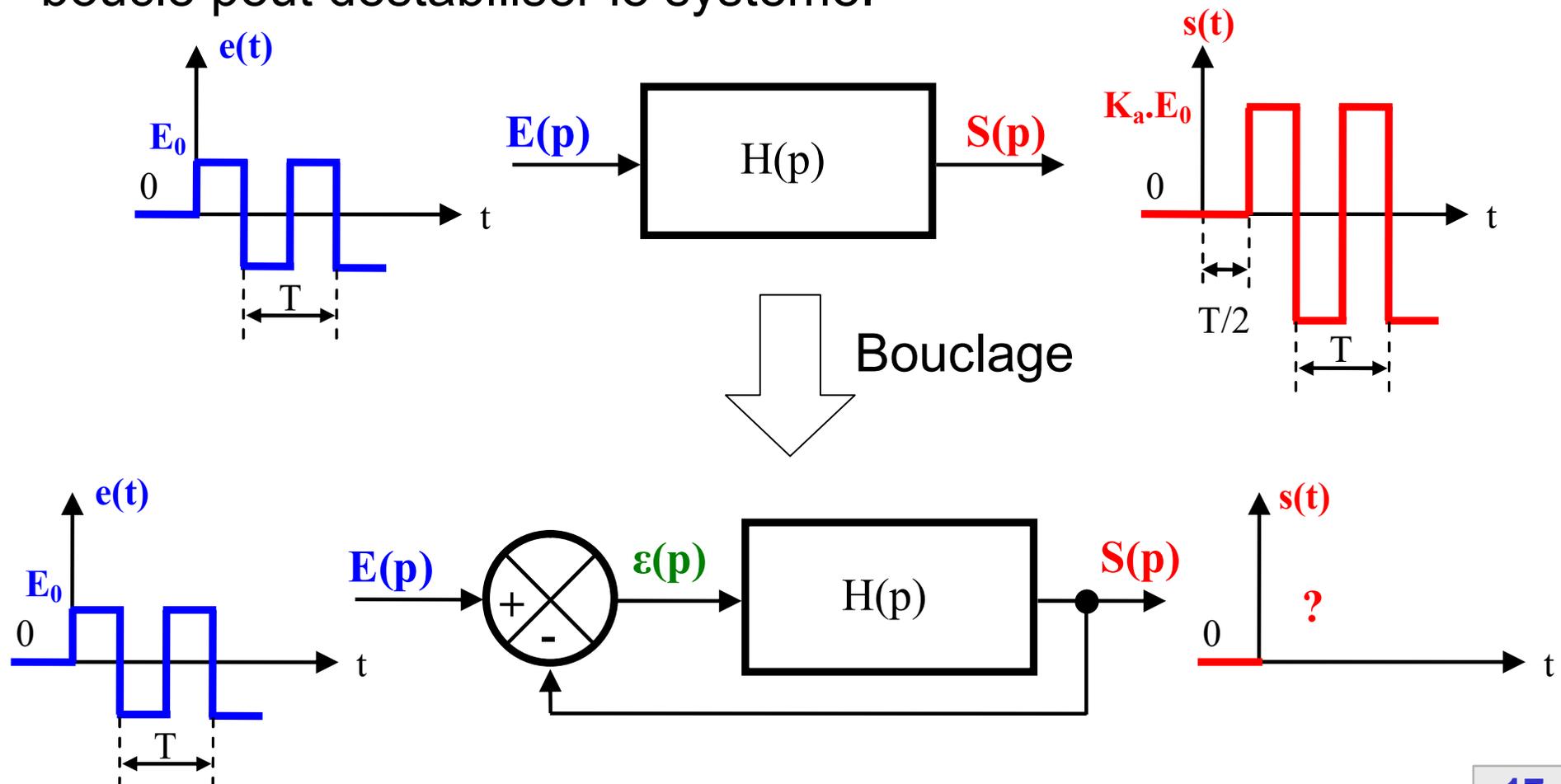
1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

Lorsque l'on boucle un SLCI pour l'asservir, l'utilisation de cette boucle peut déstabiliser le système.



1. Définitions et problématique

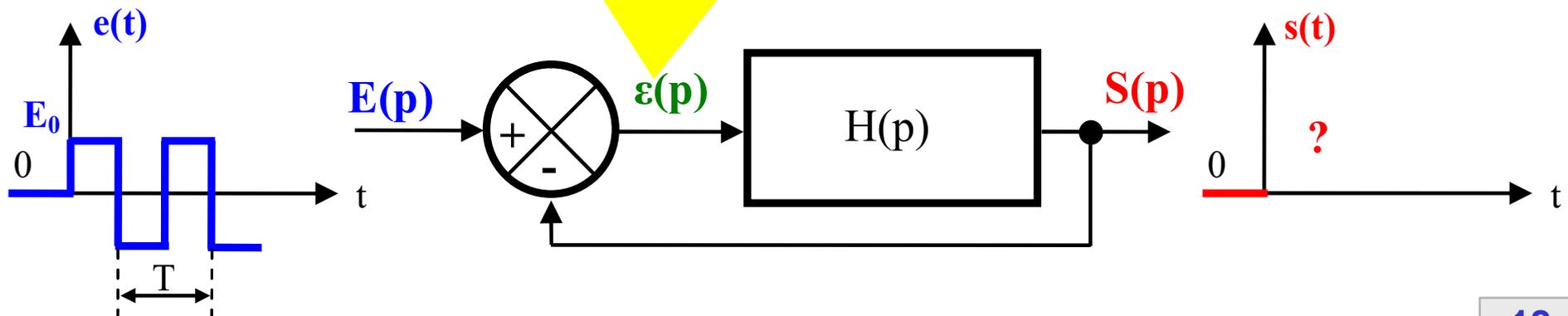


SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

Lorsque l'on boucle un SLCI pour l'asservir, l'utilisation de cette boucle peut déstabiliser le système.

L'entrée de la chaîne directe a changé, c'est maintenant l'écart.

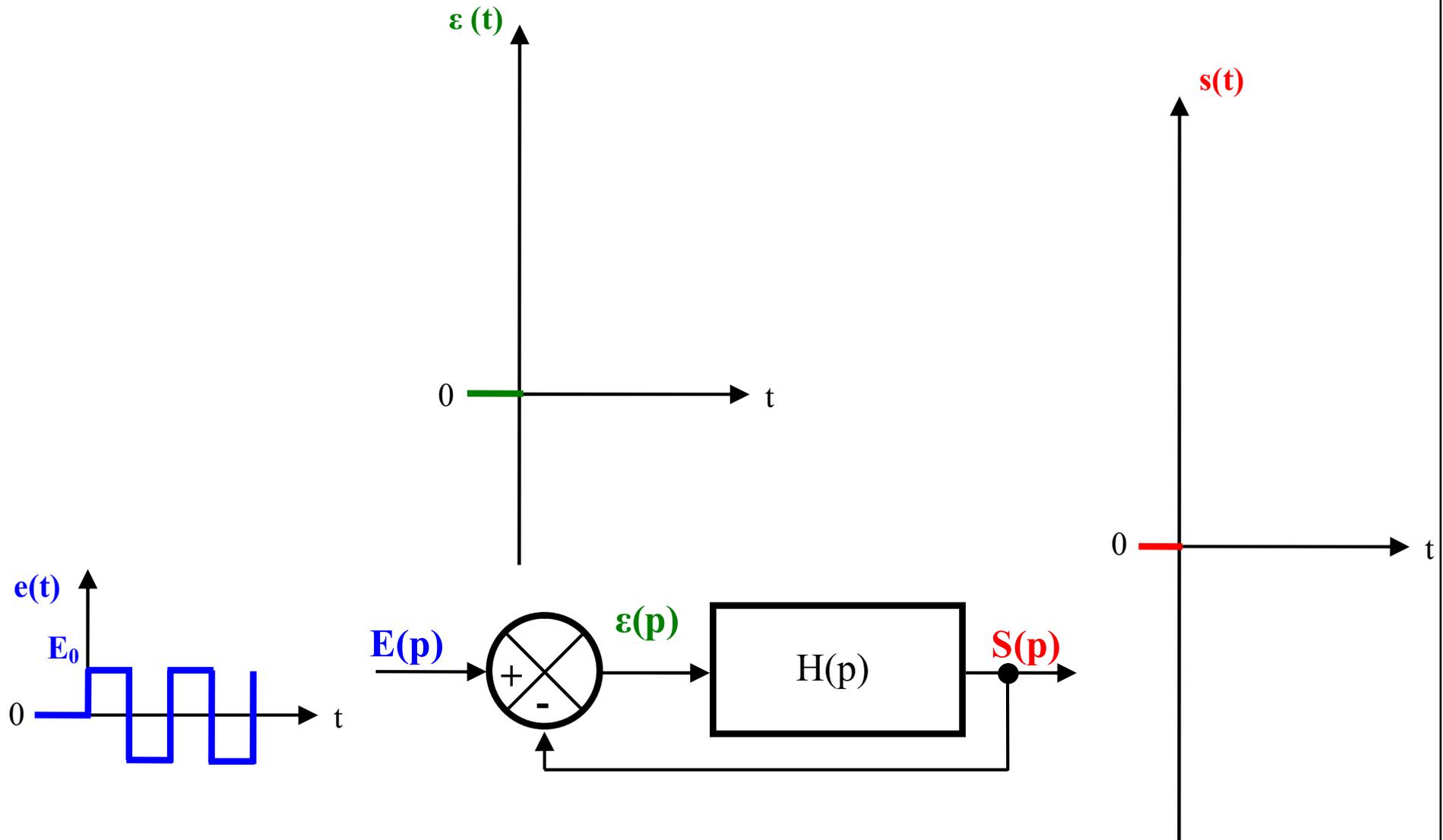


1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

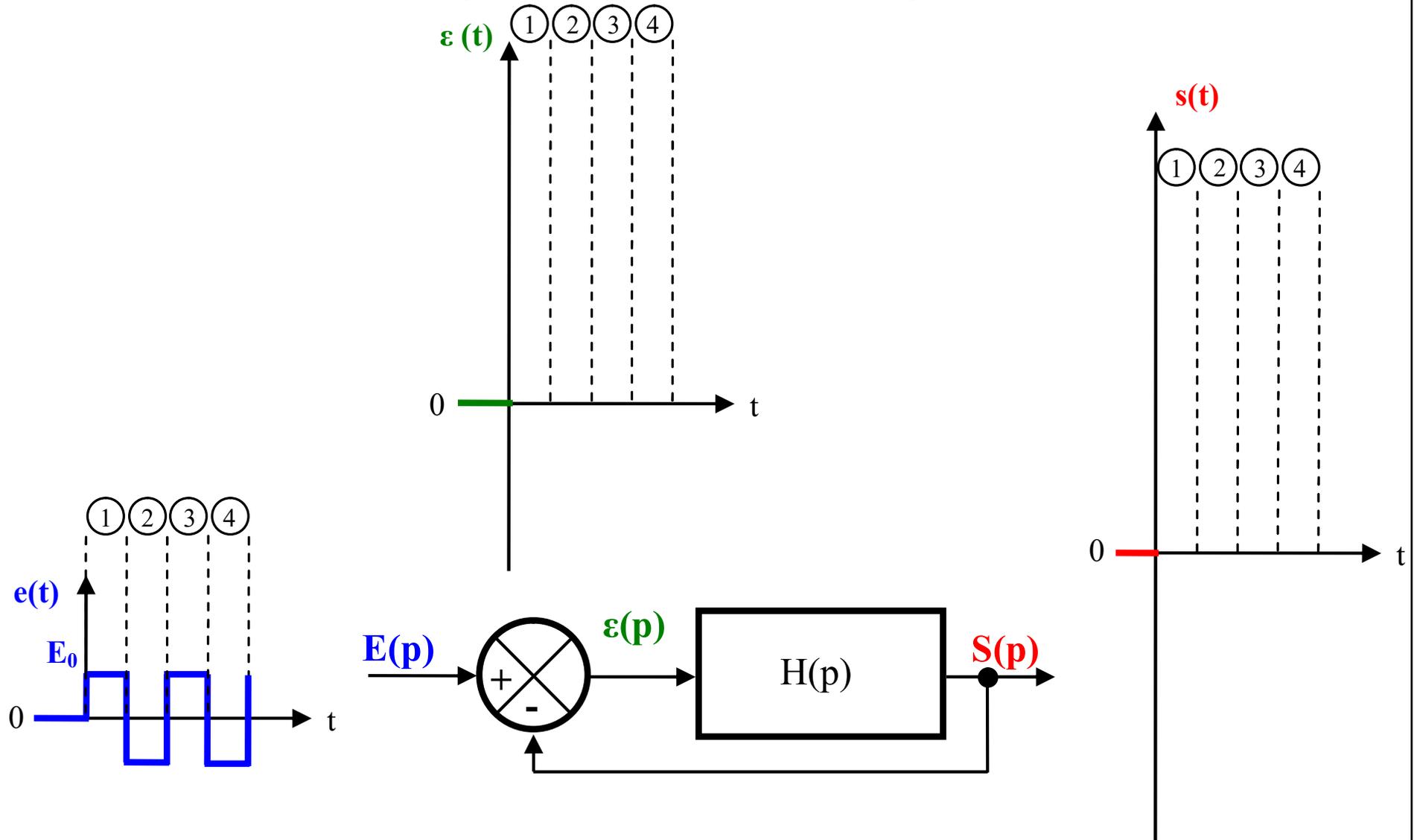


1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

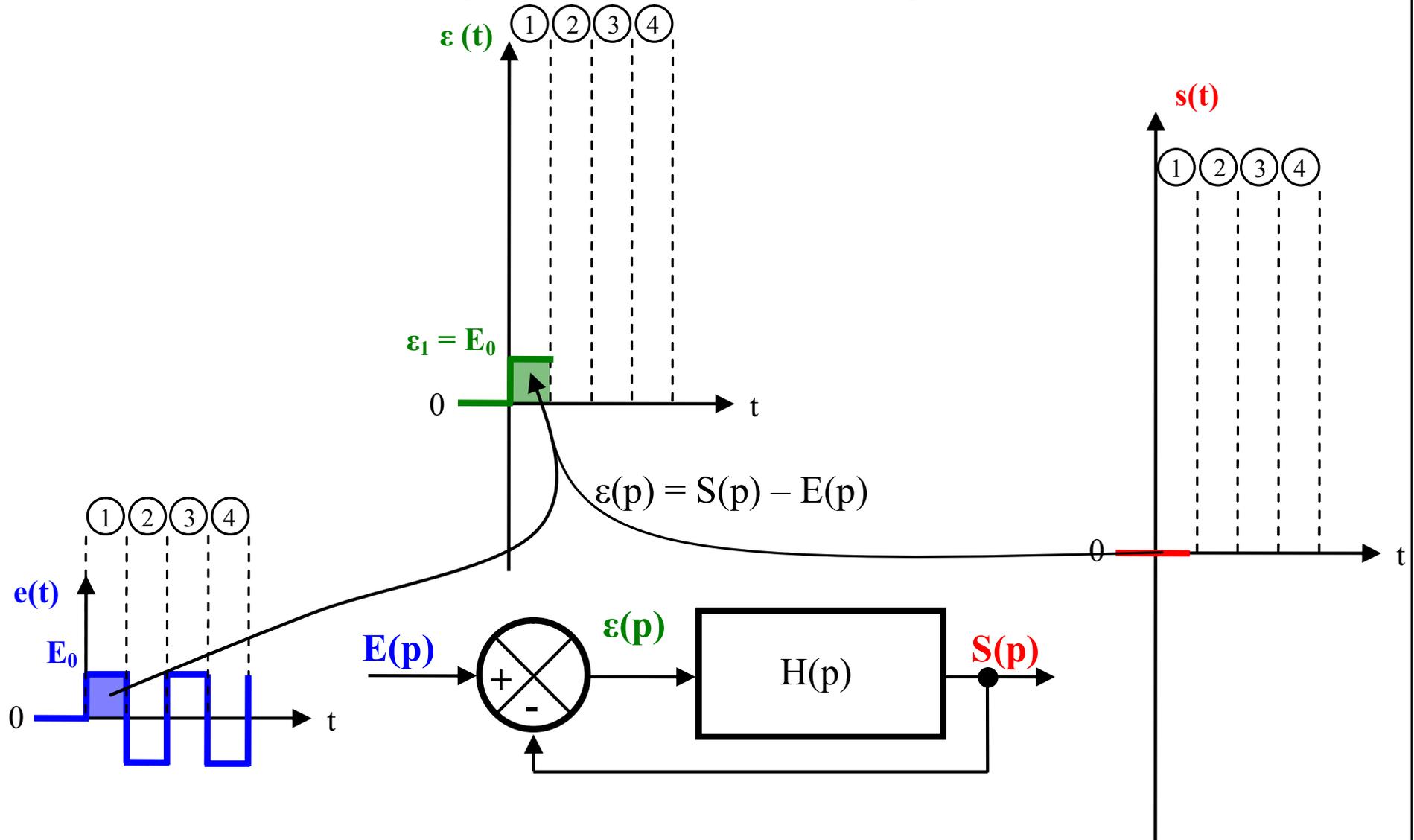


1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

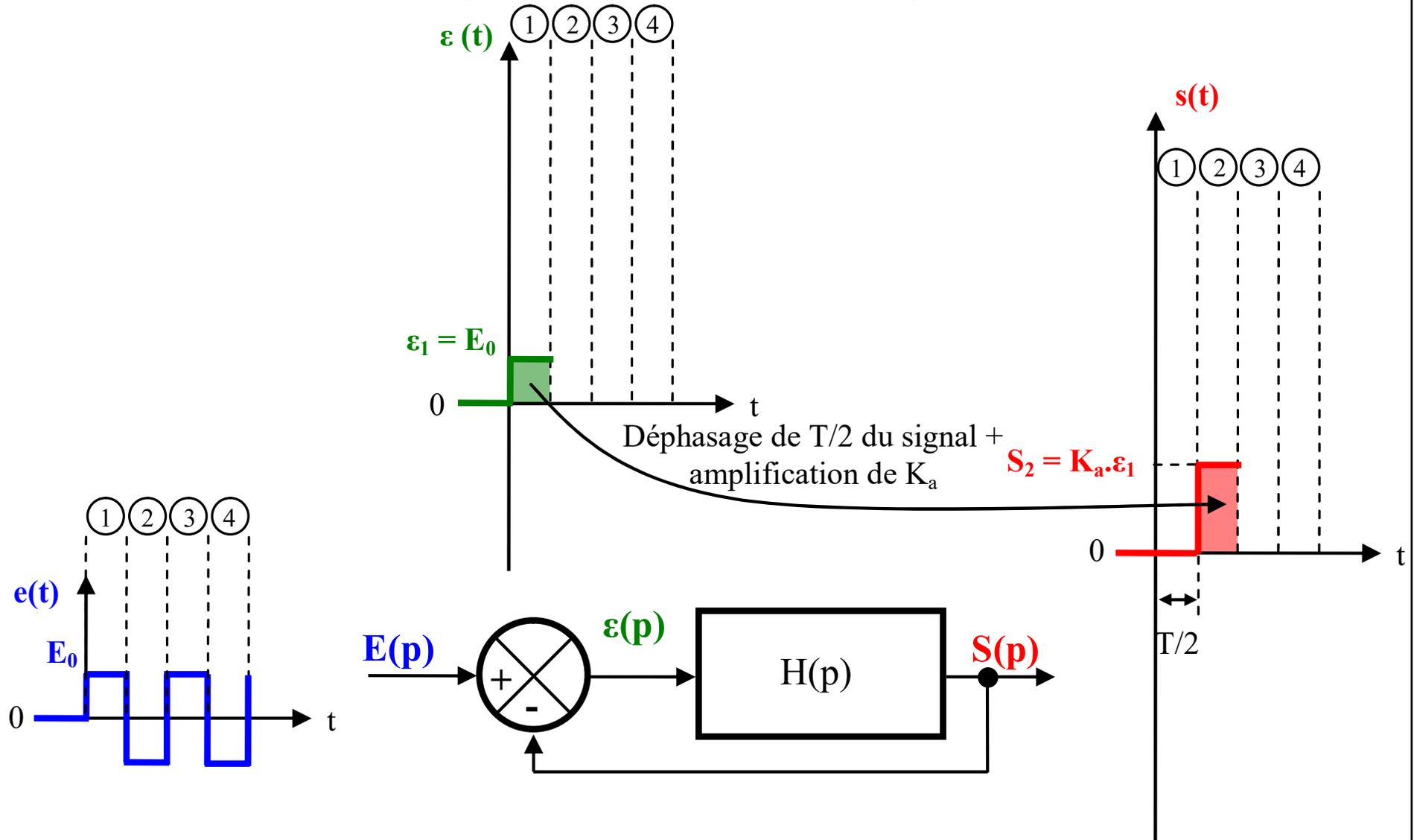


1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

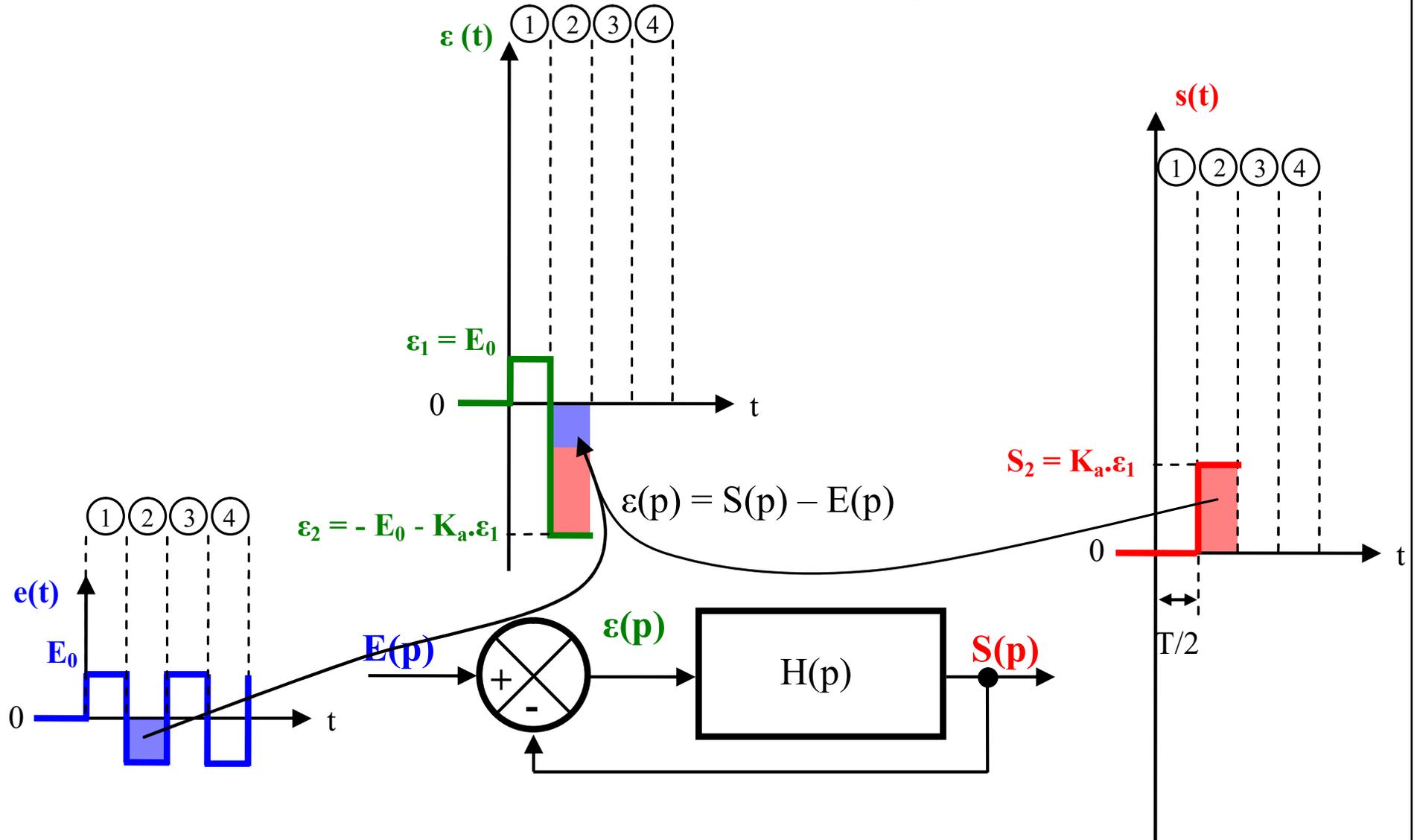


1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

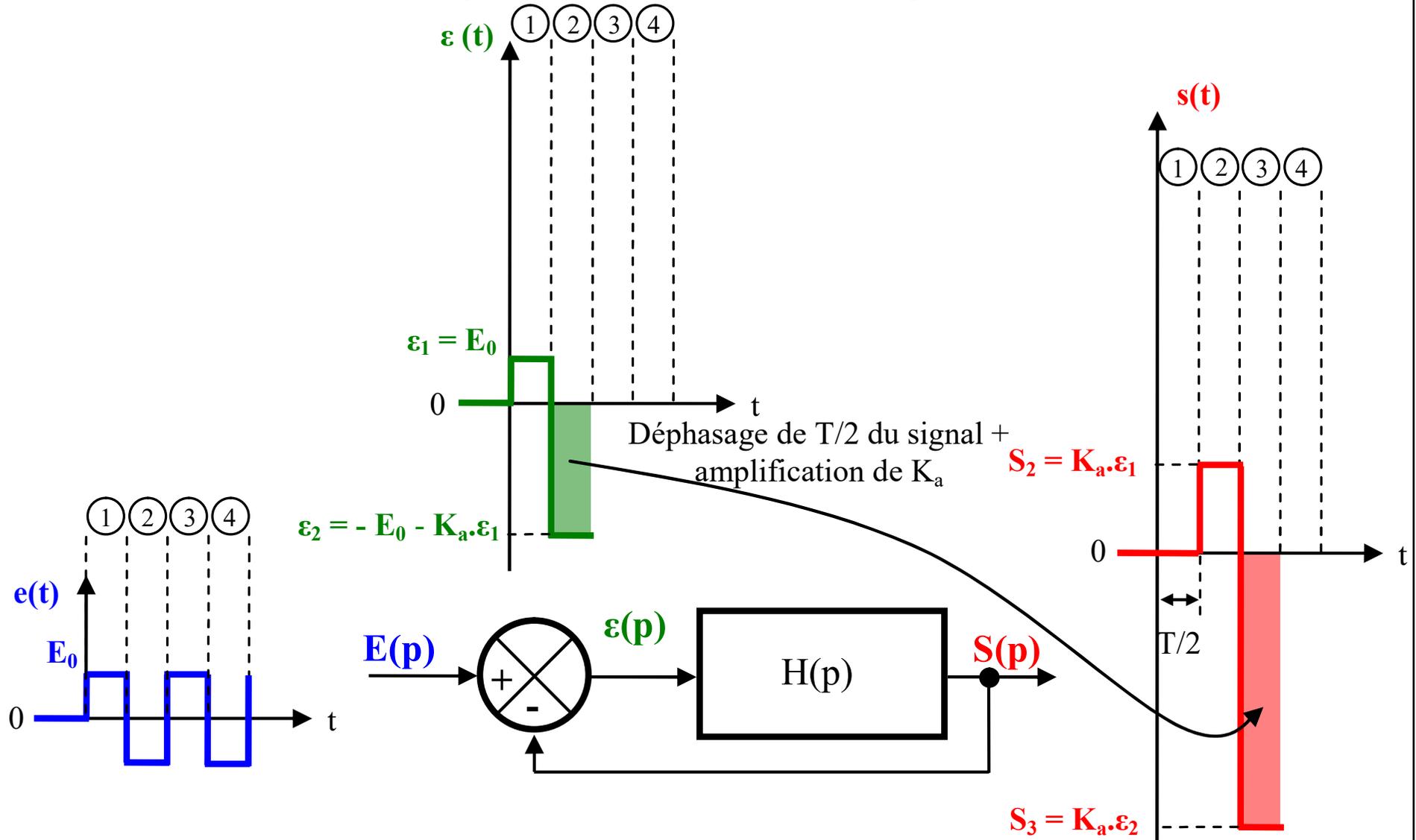


1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

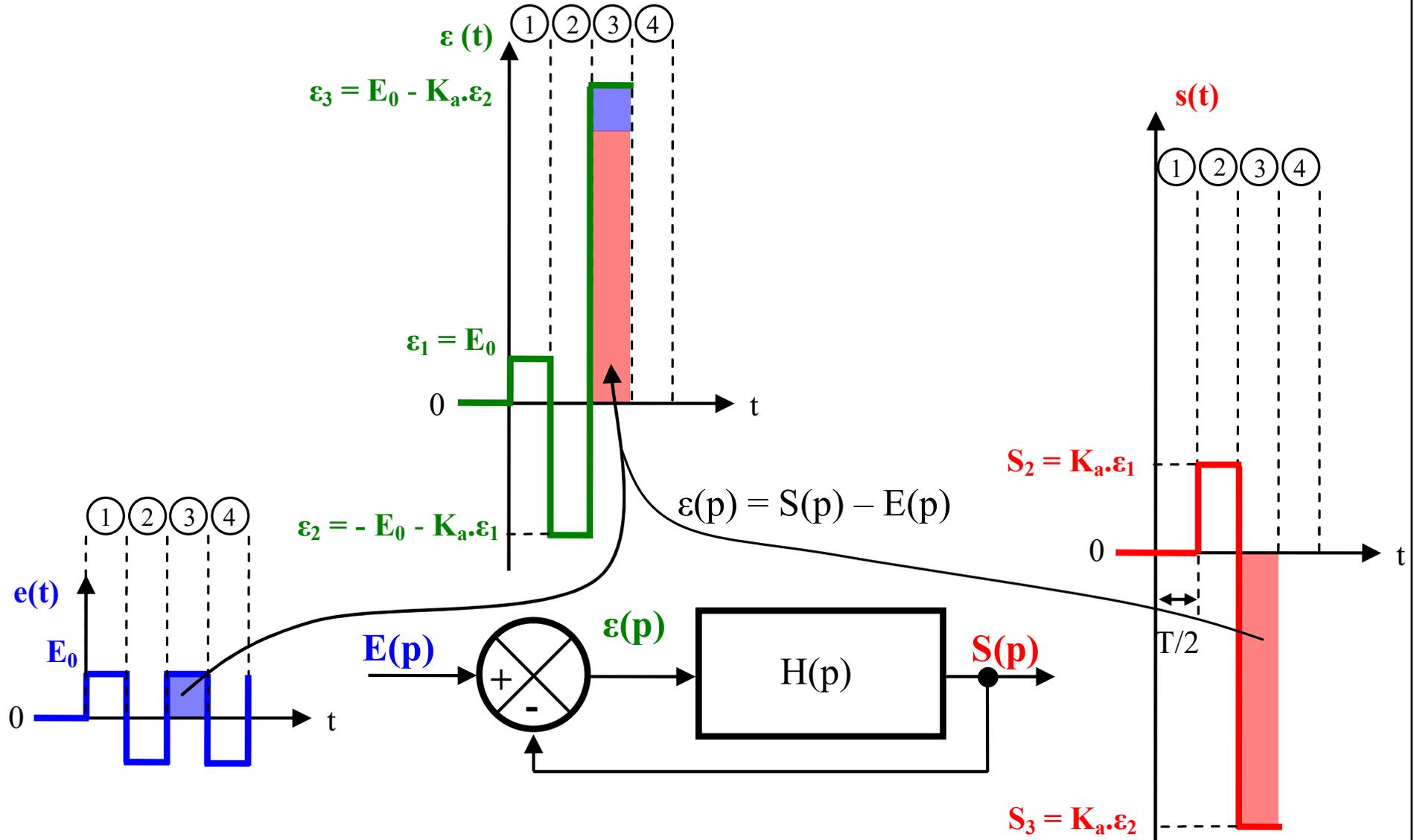


1. Définitions et problématique



SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage

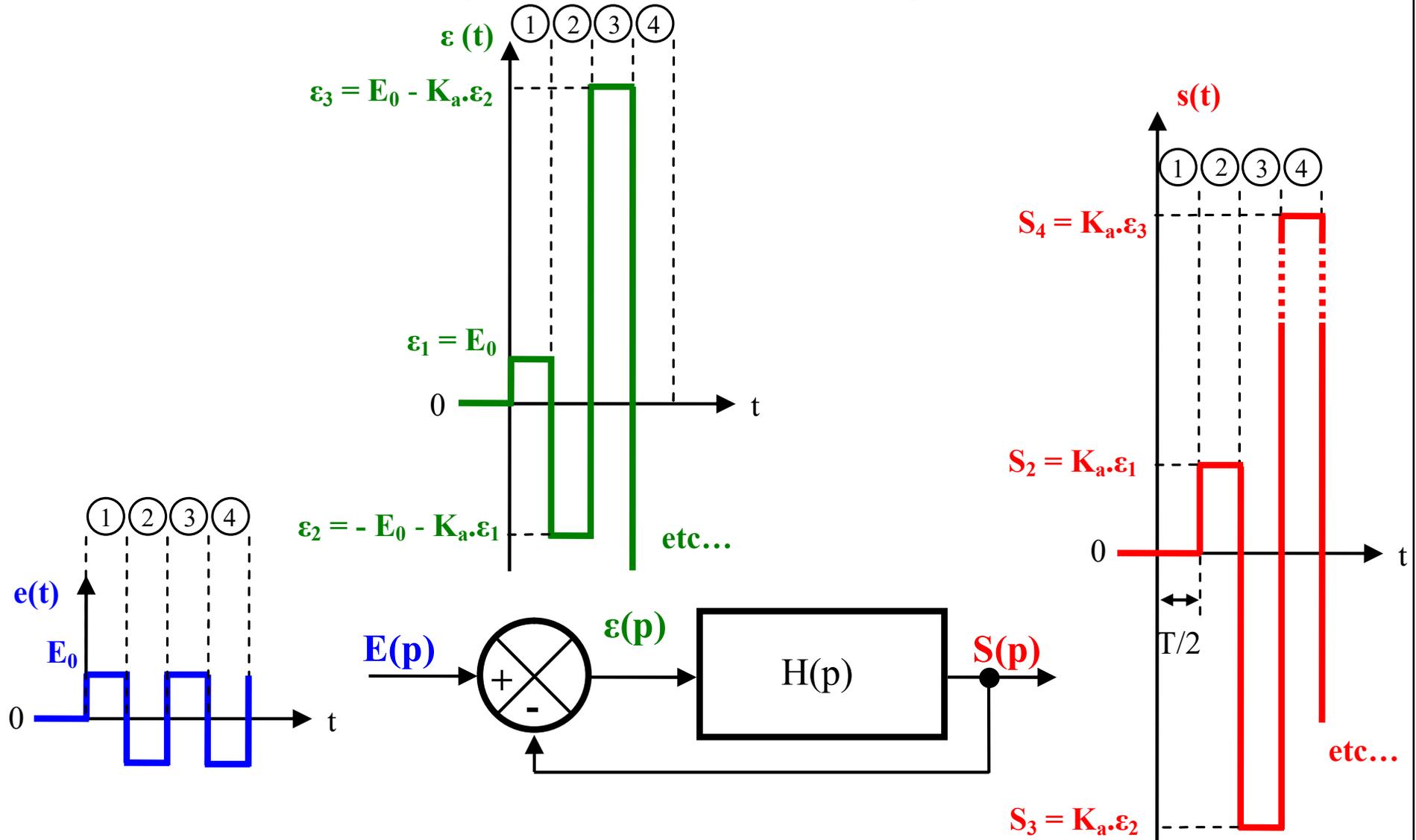


1. Définitions et problématique

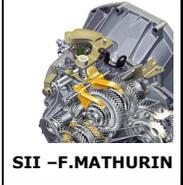


SII - F.MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage



1. Définitions et problématique



1.4. Instabilité d'un système après bouclage



L'écart ε tend en valeur absolue vers :

$$E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3 + \dots + K_a^n)$$

C'est une suite qui converge ou diverge suivant les valeurs de K_a

Par conséquent si $K_a \geq 1$, la suite tend vers $+\infty$ et le signal de sortie également.

Il y a donc **instabilité après bouclage si $K_a \geq 1$** .

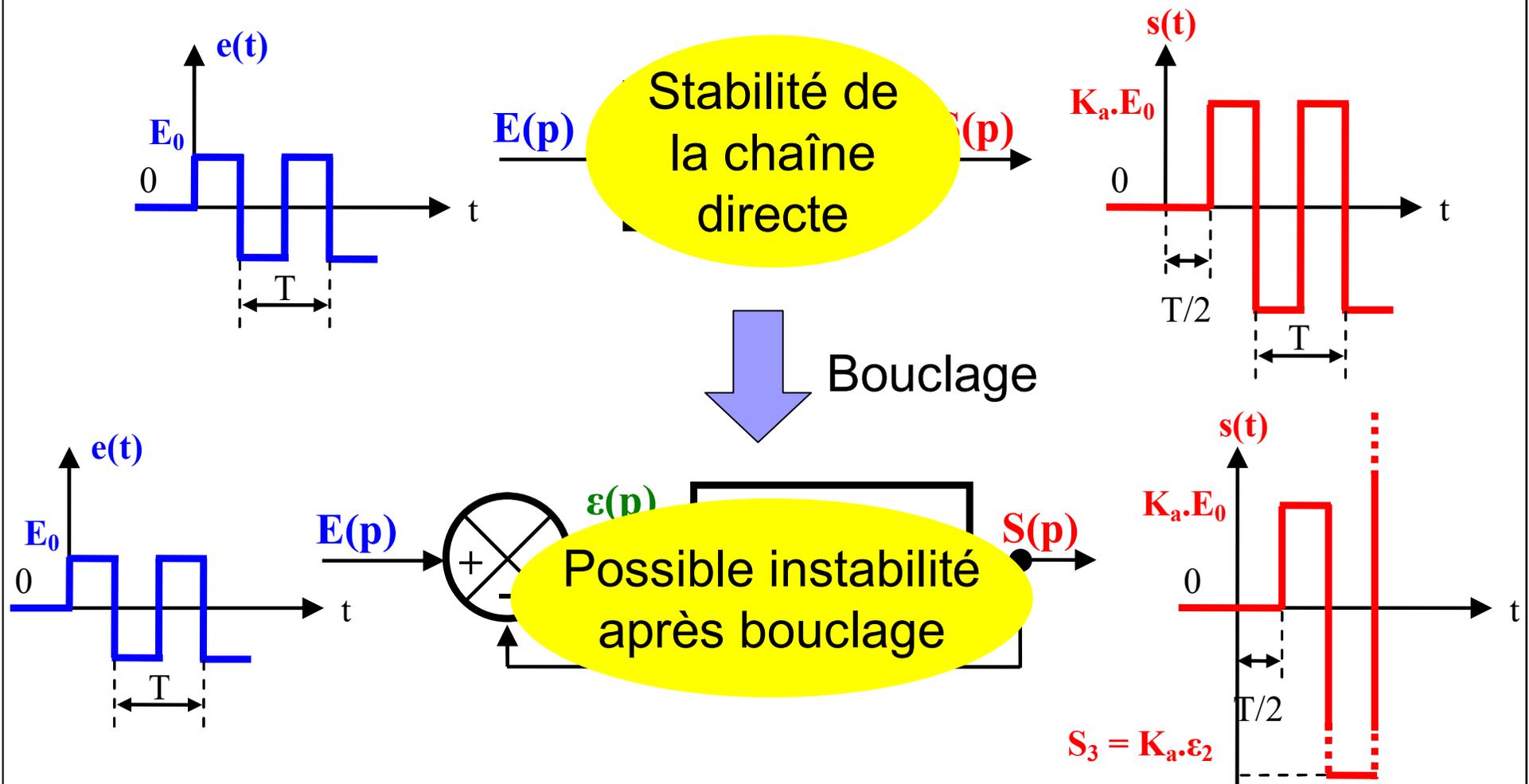


1. Définitions et problématique



SII - F. MATHURIN

1.4. Instabilité d'un système après bouclage





L'existence de la boucle de retour impose **d'étudier la stabilité des systèmes asservis**

Objectif de ce cours : mettre en place des outils permettant d'évaluer rapidement la stabilité

A partir de **critères analytiques** sur le polynôme caractéristique de la **FTBF** du système.

Partie 2

A partir de **critères graphiques** sur les lieux de transfert de la **FTBO** du système.

Partie 3

Principales causes d'instabilité → **Partie 4**

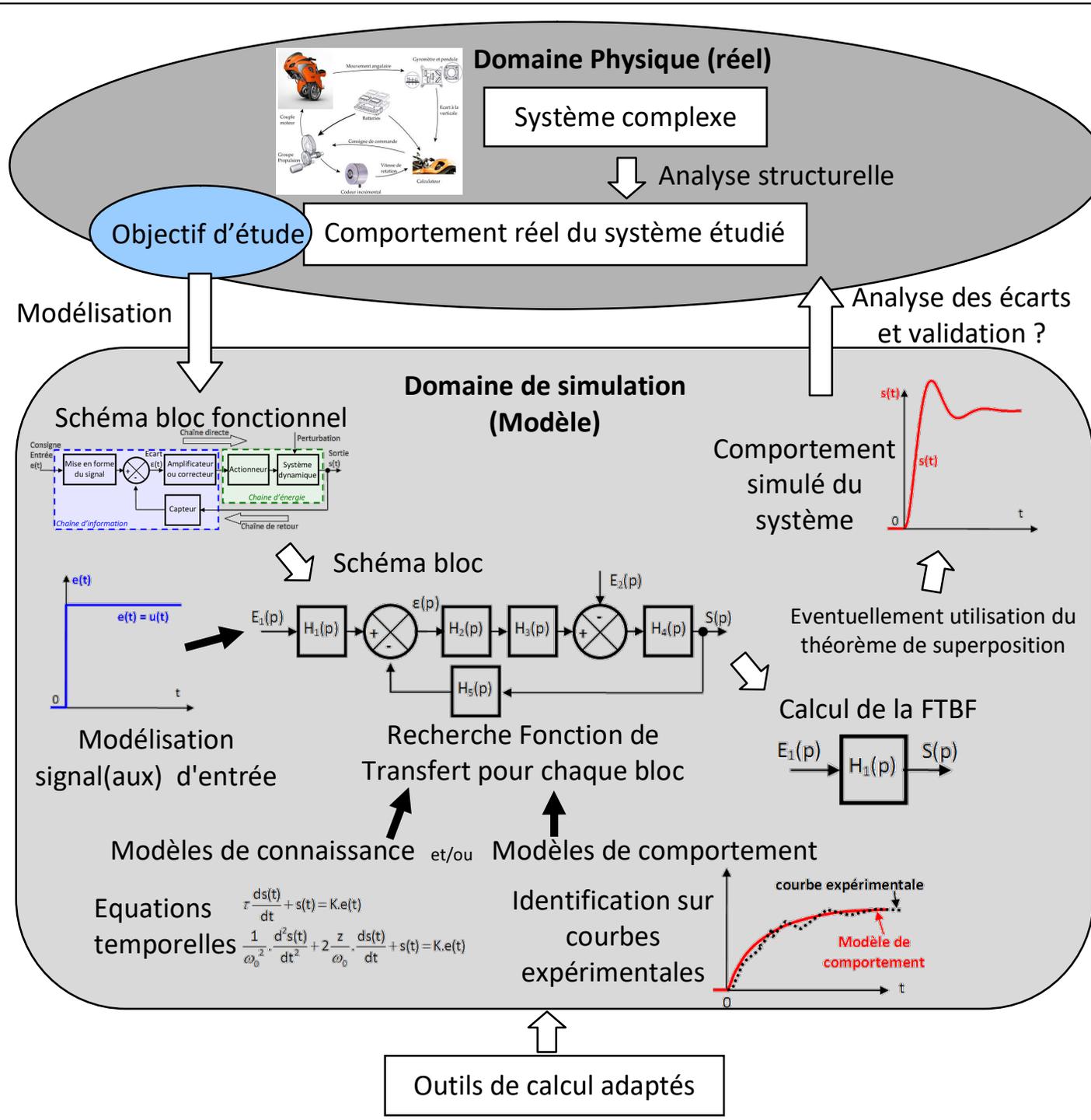


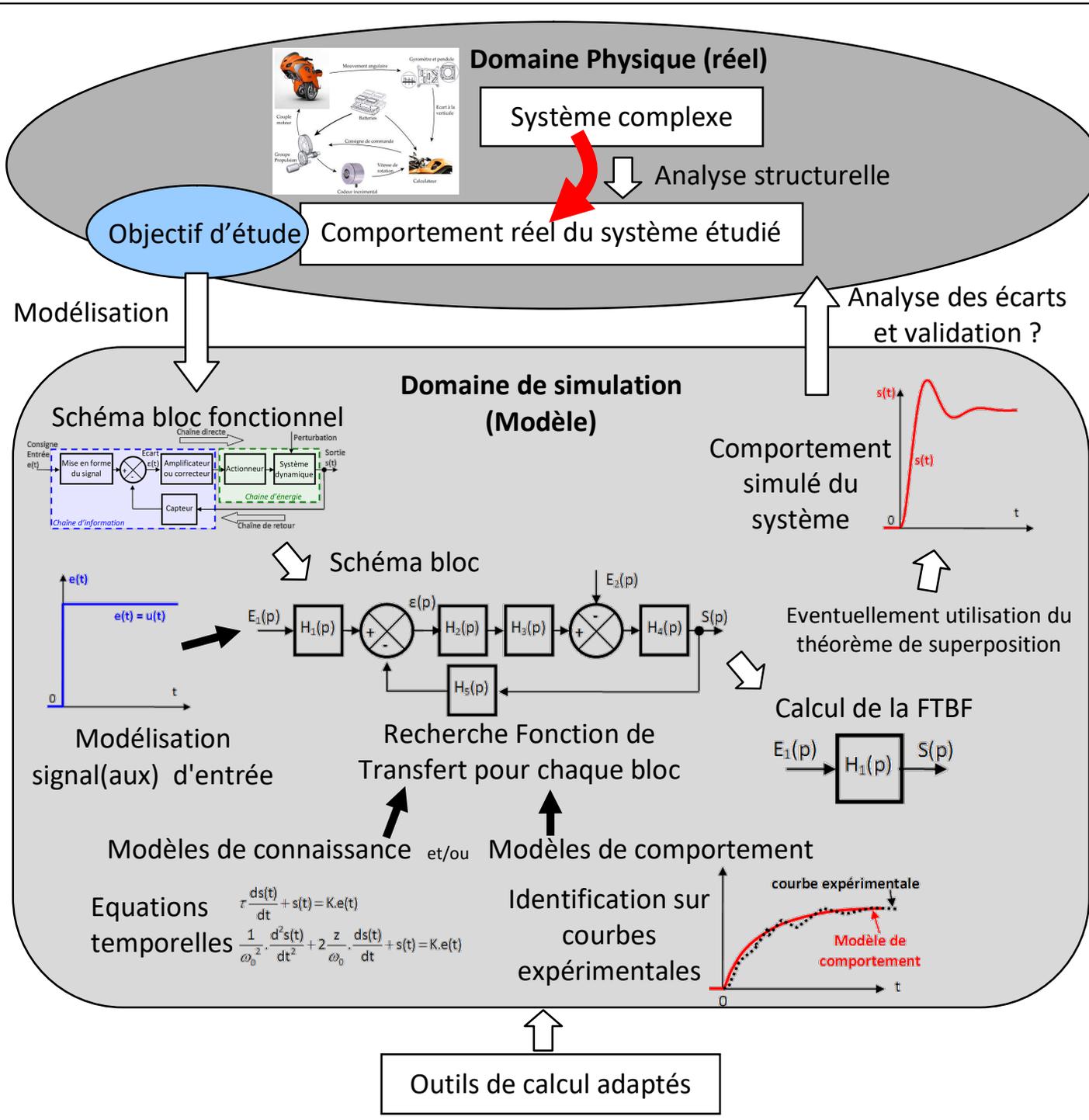
1. Définitions et problématique

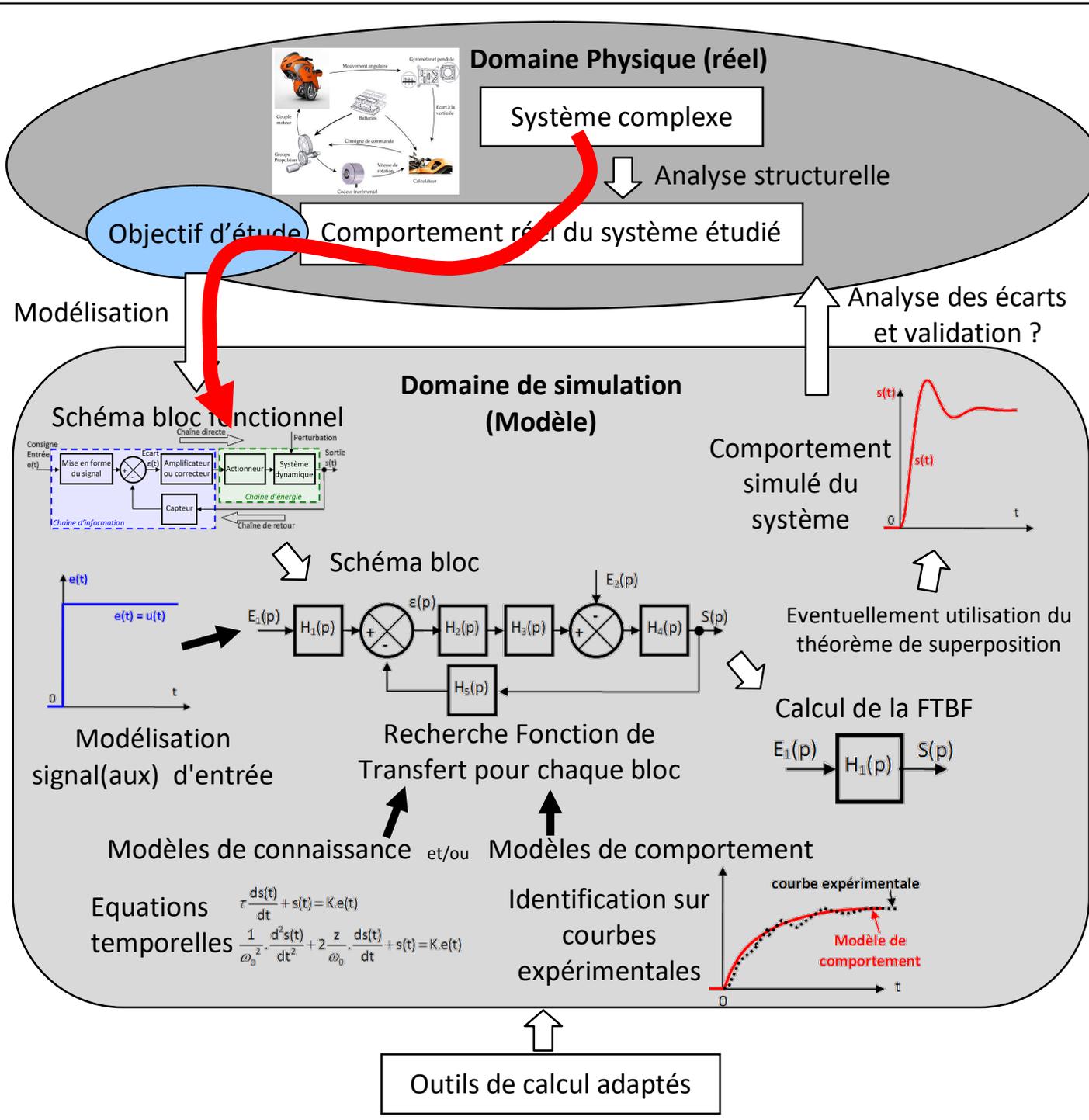
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF

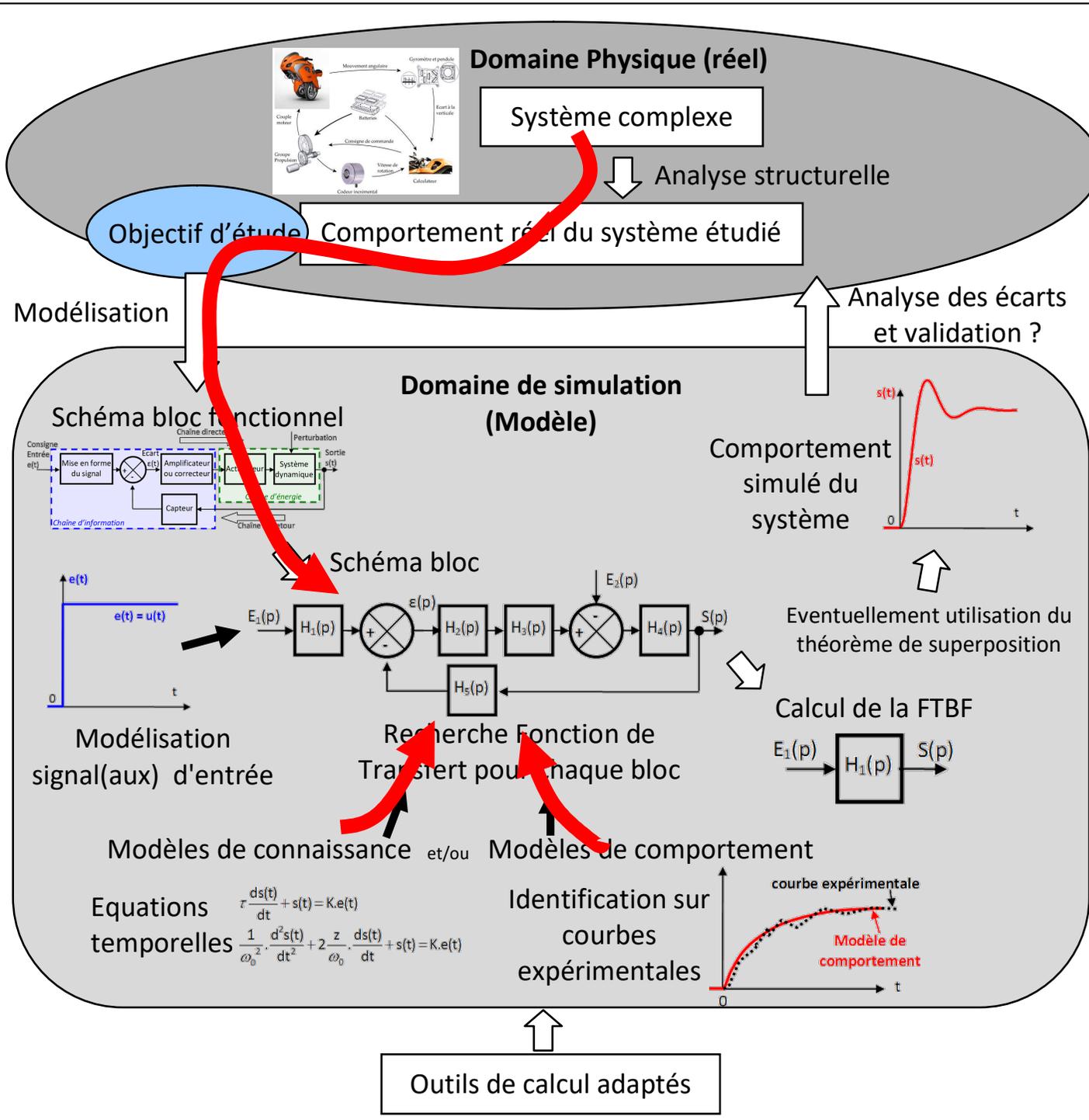
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO

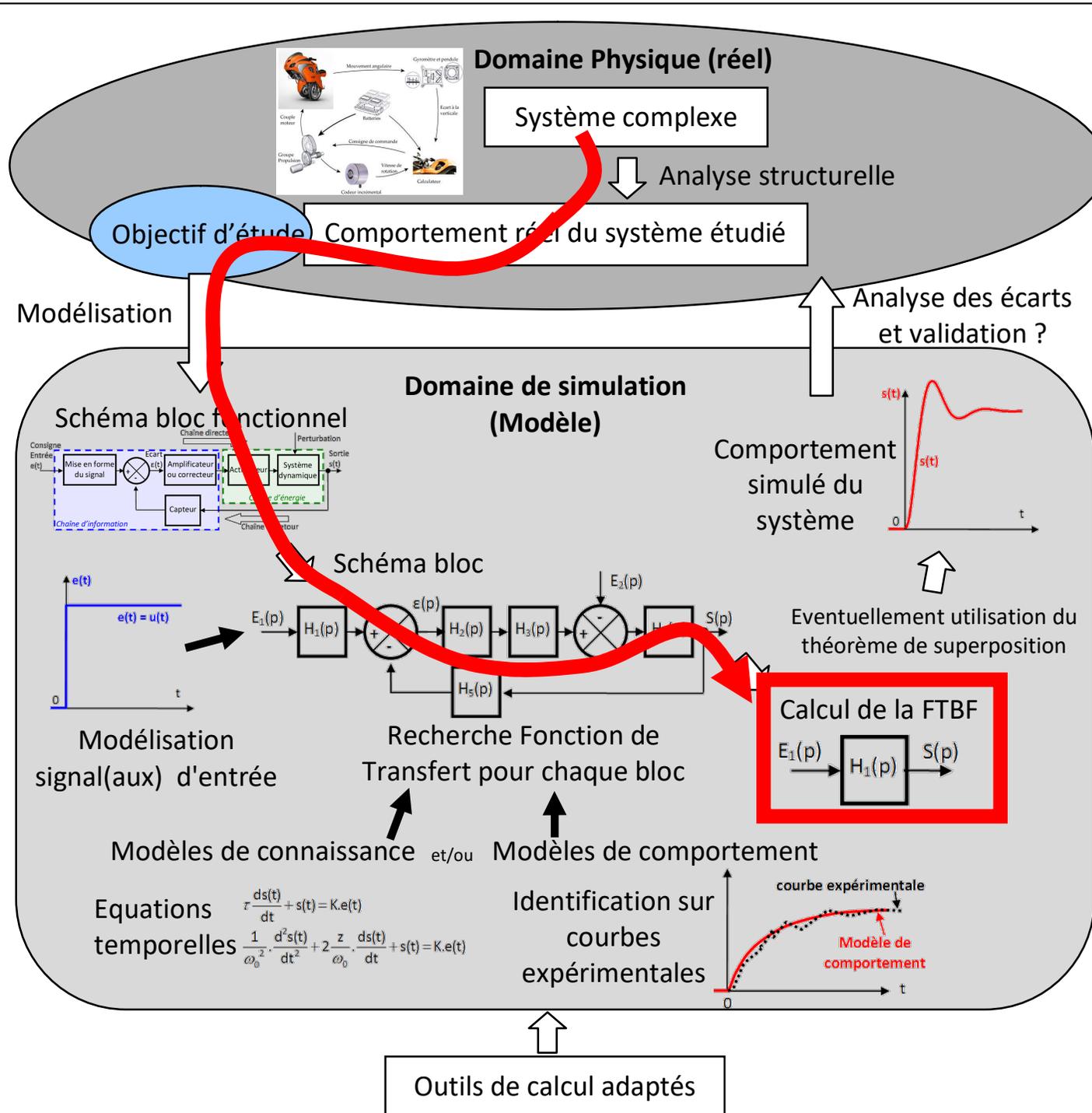
4. Causes d'instabilité











2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F.MATHURIN

FTBF :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$



$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

$$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$$

Chapitre 2.1

Chapitre 2.2

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII -F.MATHURIN

2.1. Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF

FTBF :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)} \quad \curvearrowright \quad D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F.MATHURIN

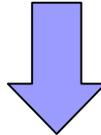
2.1. Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF

FTBF :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$



$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$



Même configuration que chapitre 1.3

Un système asservi est stable ssi sa FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



Exemple du scooter UNO III

Vidéo

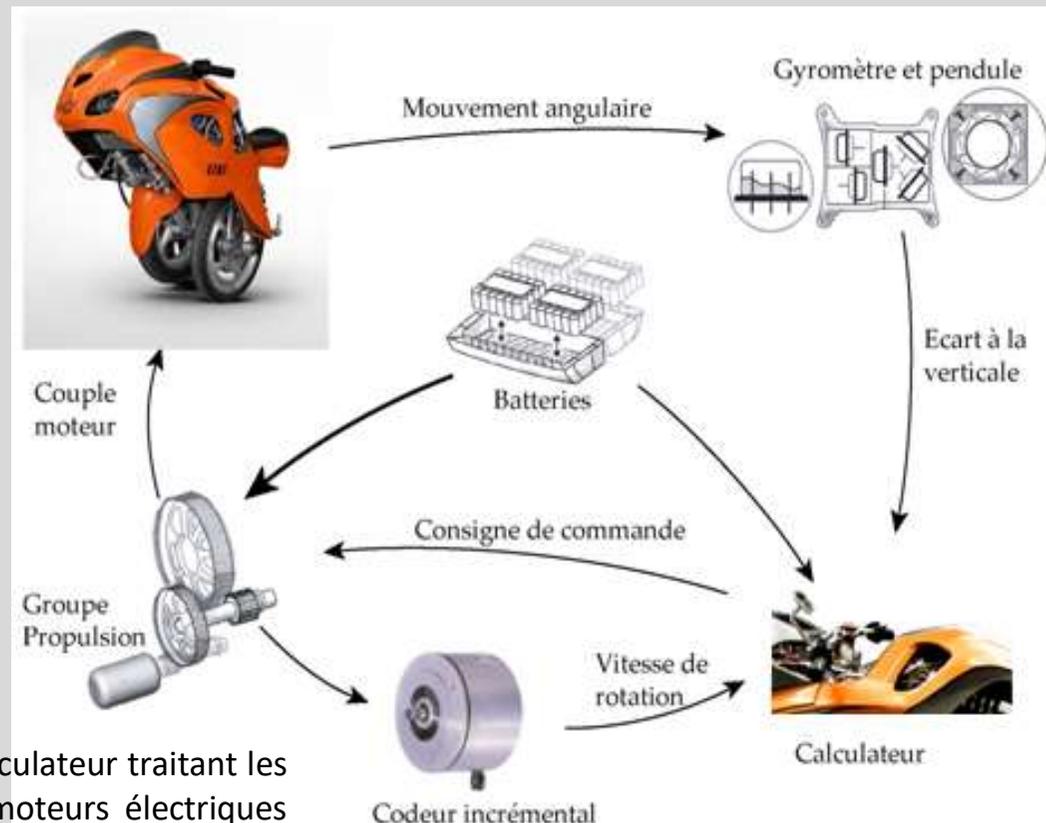


Uno I (Concept initial)



Uno III

Le scooter Uno III est un parfait exemple de système asservi qui doit être nécessairement stable pour un bon fonctionnement. L'équilibre du système est notamment obtenu grâce à un système gyroscopique couplé à un calculateur traitant les informations et transmettant les consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux groupes propulsion.



Exemple de système asservi

CONCEPT DU SCOOTER AUTOBALANCE

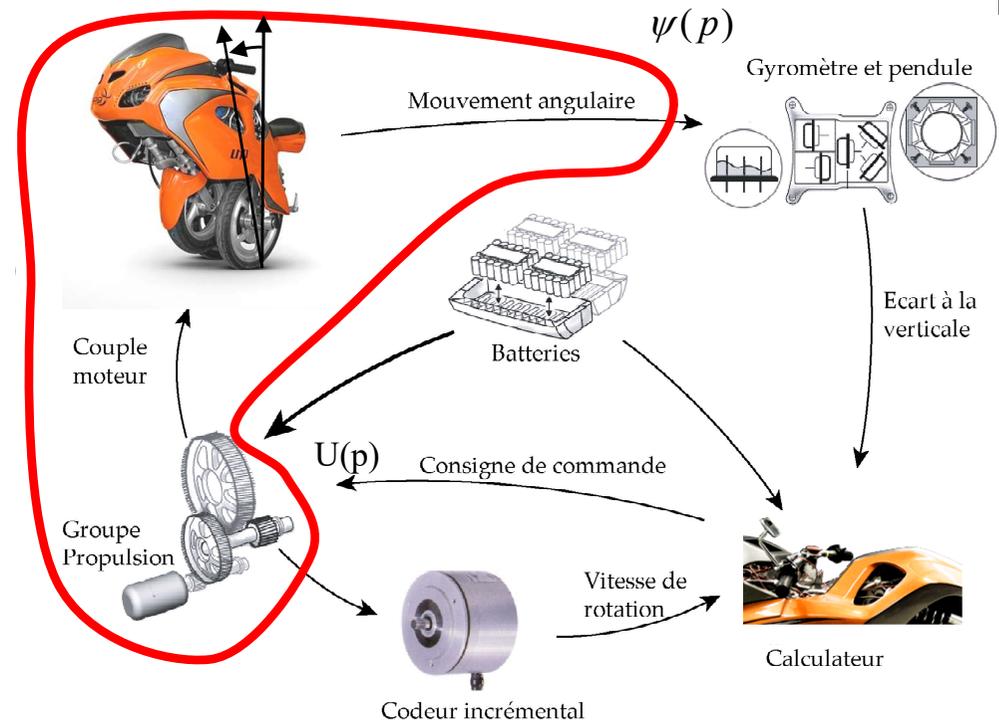
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

On s'intéresse d'abord au système dynamique seul



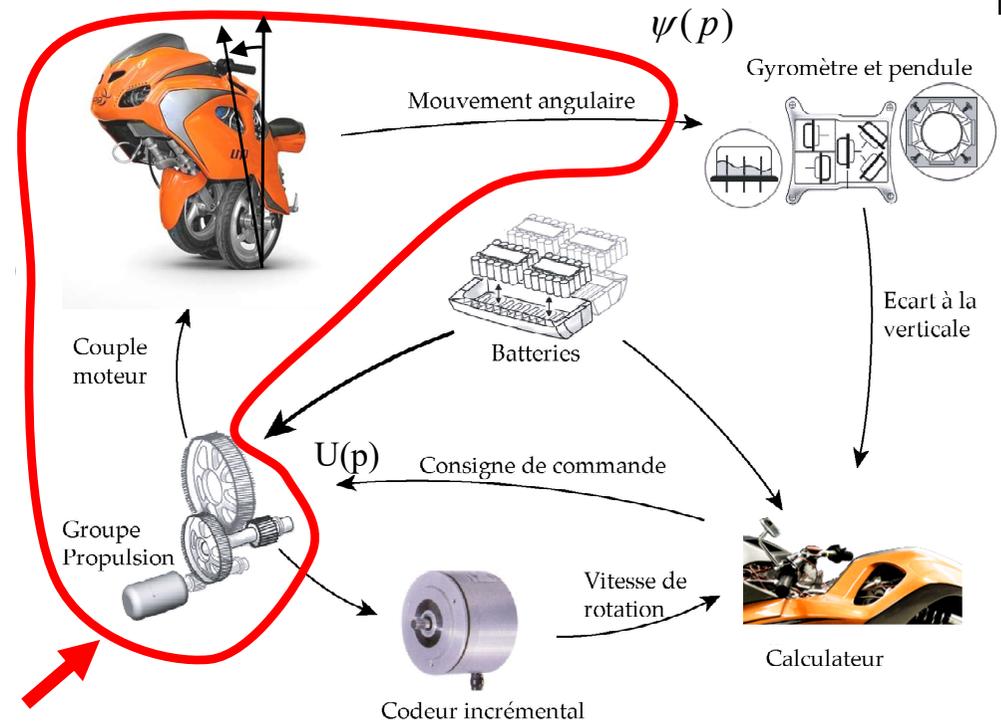
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

On s'intéresse d'abord au système dynamique seul



Loi proportionnelle entre tension du moteur $u(t)$ et couple délivré par le groupe propulsion $C_m(t)$

$$C_m(t) = K_m \cdot u(t)$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



Exemple du scooter UNO III

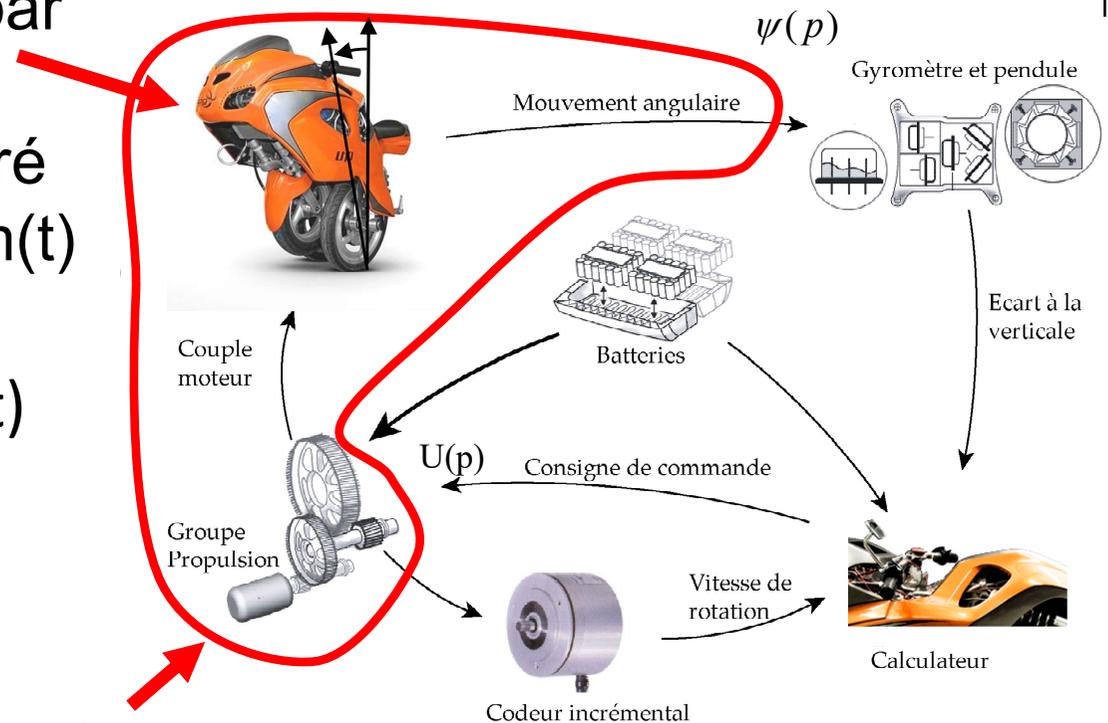
Un modèle dynamique permet de lier l'angle d'inclinaison par rapport à la verticale du châssis $\psi(t)$ au couple délivré par le groupe propulsion $C_m(t)$

$$A \cdot \frac{d^2}{dt^2} \psi(t) = B \cdot C_m(t) + C \cdot \psi(t)$$

A, B et C constantes positives

Loi proportionnelle entre tension du moteur $u(t)$ et couple délivré par le groupe propulsion $C_m(t)$

On s'intéresse d'abord au système dynamique seul



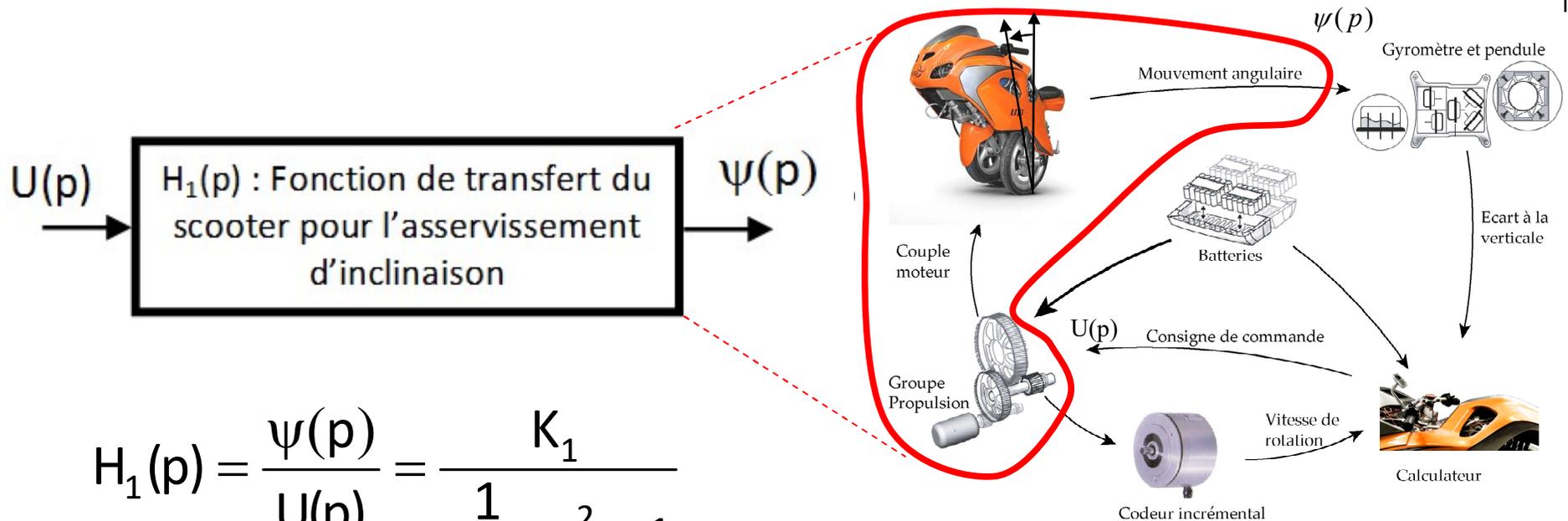
$$C_m(t) = K_m \cdot u(t)$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Exemple du scooter UNO III



$$H_1(p) = \frac{\psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1}$$

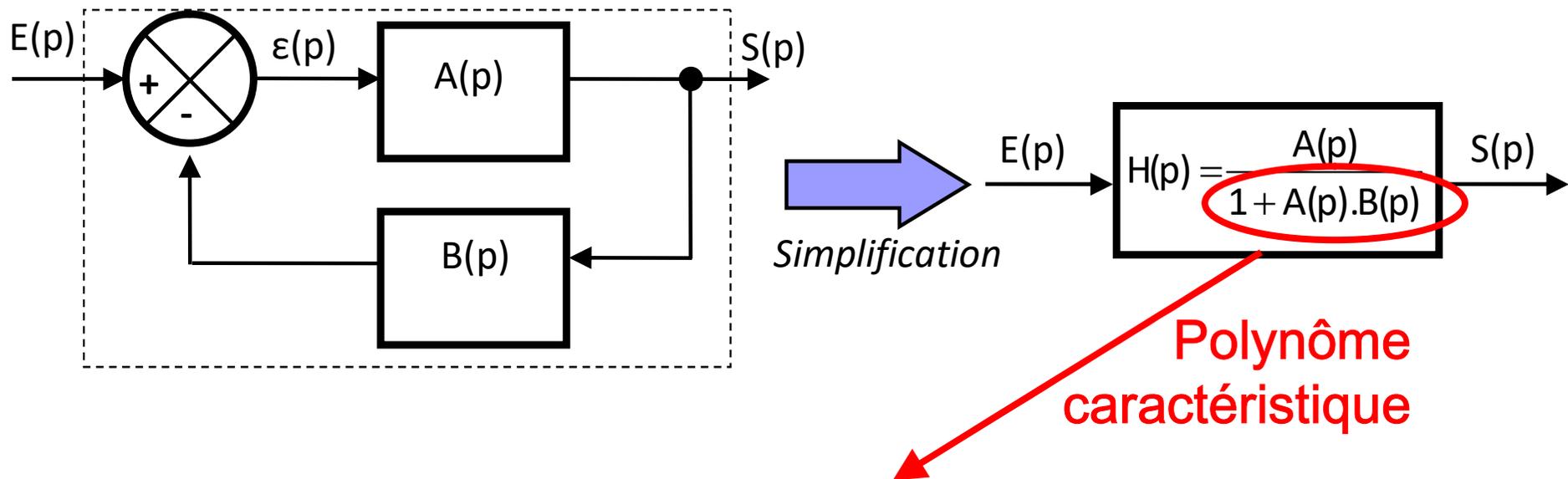
avec $K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$ et $\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

2.2. Etude de la stabilité à partir de critères algébriques sur la FTBF : critère de Routh



$$D(p) = 1 + \text{FTBO} = a_0 + a_1.p + \dots + a_{n-1}.p^{n-1} + a_n.p^n$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII -F.MATHURIN

2.2. Etude de la stabilité à partir de critères algébriques sur la FTBF : critère de Routh

$$D(p) = 1 + FTBO = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII -F.MATHURIN

2.2. Etude de la stabilité à partir de critères algébriques sur la FTBF : critère de Routh

$$D(p) = 1 + FTBO = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n$$



Pour ordre ≤ 3 :

$$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII -F.MATHURIN

2.2. Etude de la stabilité à partir de critères algébriques sur la FTBF : critère de Routh

$$D(p) = 1 + FTBO = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n$$



Pour ordre ≤ 3 :

$$D(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3$$

Premier examen : Si $\exists a_i < 0$ ou nuls \rightarrow système instable.

(premier examen suffit pour ordre 2)

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F.MATHURIN

2.2. Etude de la stabilité à partir de critères algébriques sur la FTBF : critère de Routh

$$D(p) = 1 + FTBO = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n$$

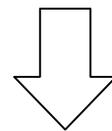


Pour ordre ≤ 3 :

$$D(p) = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + a_3 p^3$$

Premier examen : Si $\exists a_i < 0$ ou nuls \rightarrow système instable.

(premier examen suffit pour ordre 2)



Si ordre de $D(p) = 3$

Deuxième examen : vérifier aussi que $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Si ordre > 3 : Etude sur le tableau de Routh (hors programme)

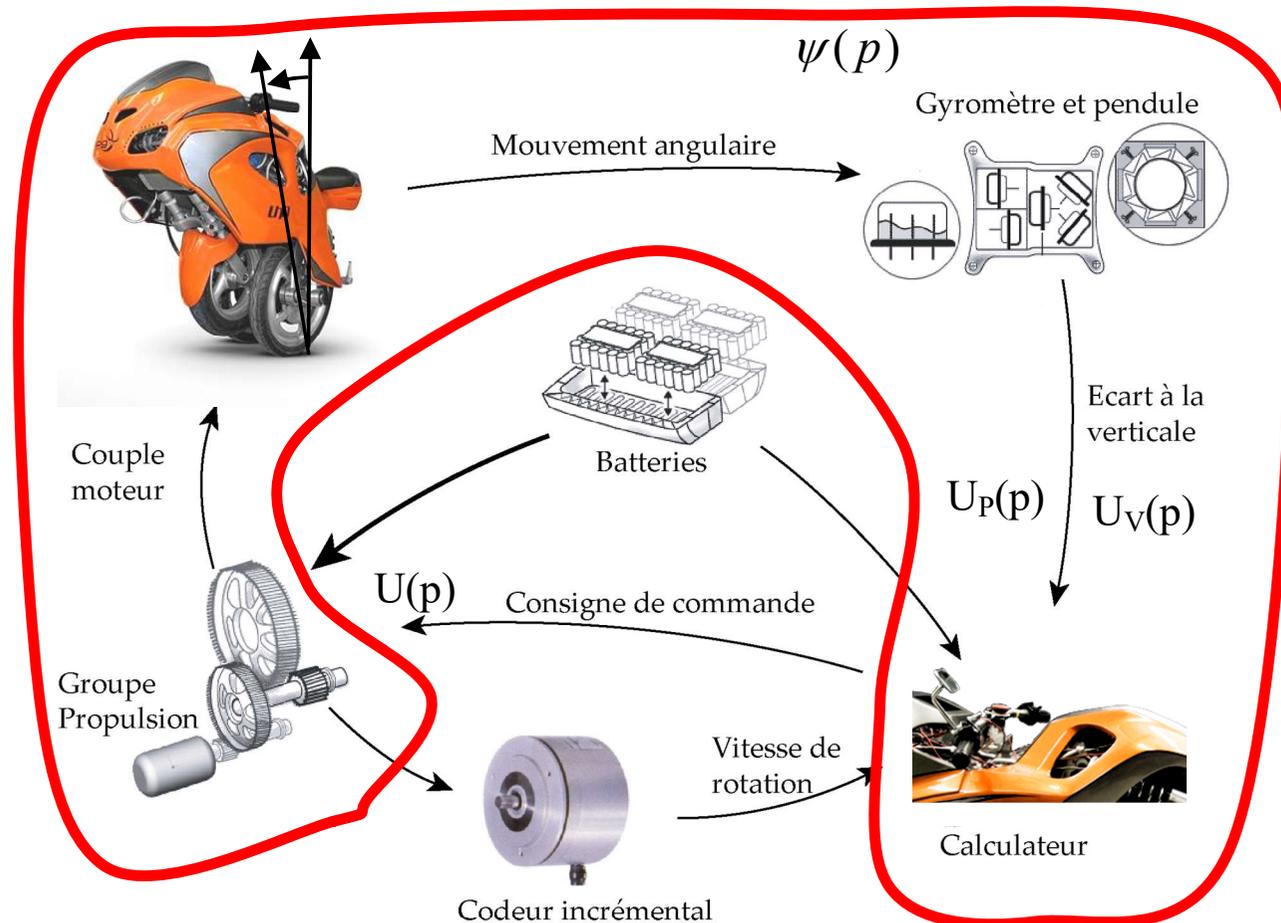
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

On ajoute un dispositif de stabilisation



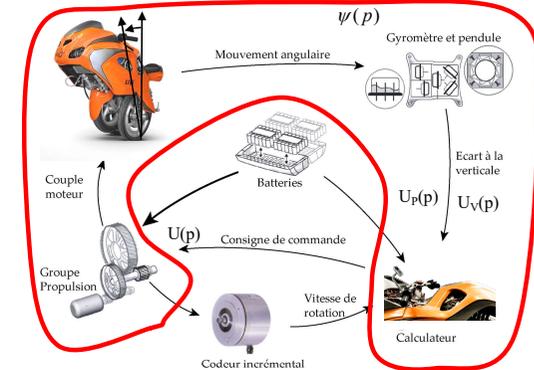
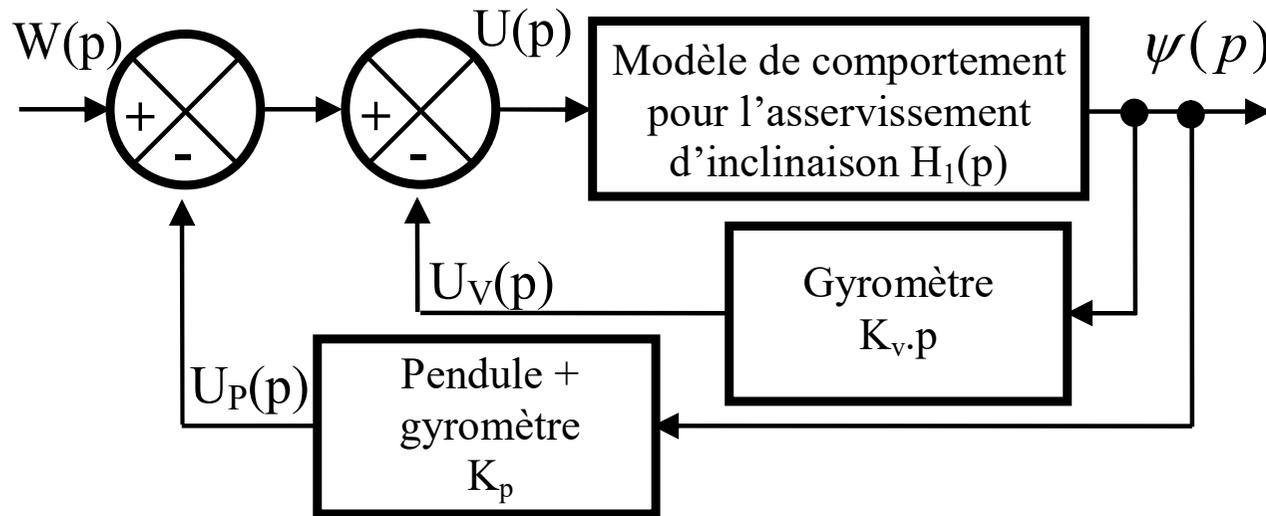
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

On ajoute un dispositif de stabilisation



$$H_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + K_p \cdot H_1(p) + p \cdot K_v \cdot H_1(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$

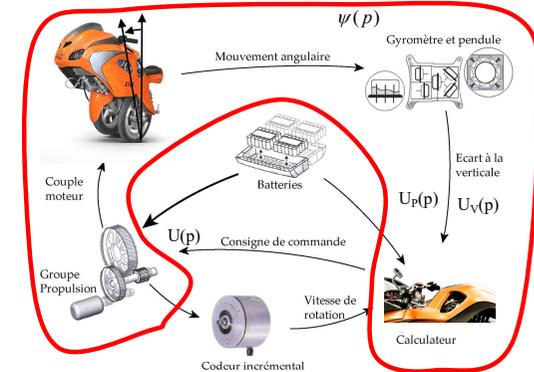
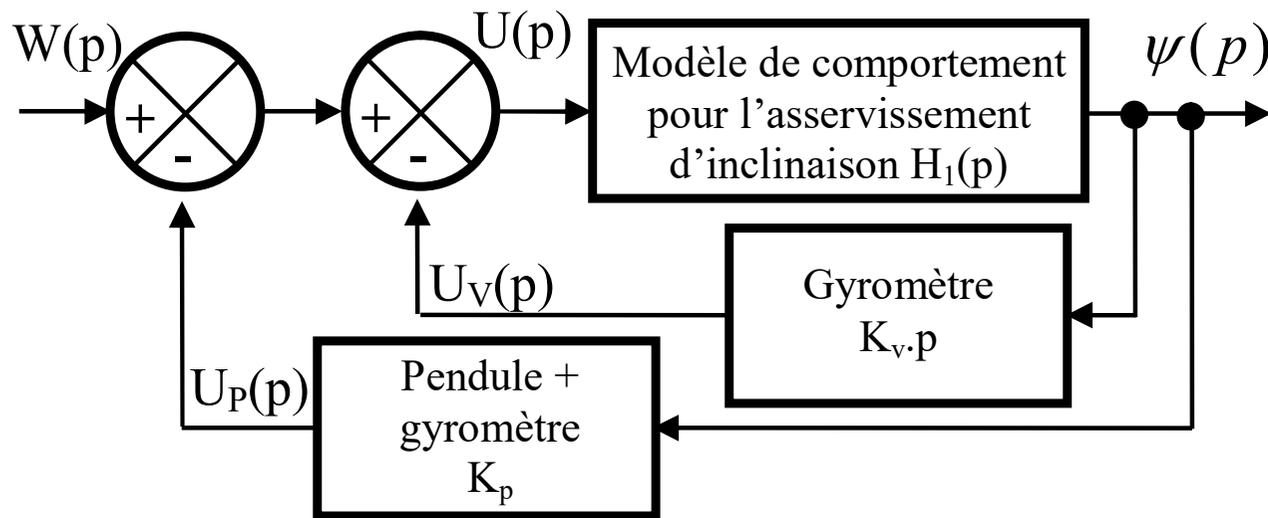
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

On ajoute un dispositif de stabilisation



$$H_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + K_p \cdot H_1(p) + p \cdot K_v \cdot H_1(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII -F.MATHURIN

Application exos 3 et 4 TD 31

TD 31 - Sciences Industrielles pour l'Ingénieur Lycée Fermat Toulouse - CPGE MPSI/PCSI

Réponses de systèmes à l'impulsion de DIRAC

On donne ci-dessous des réponses à l'impulsion de Dirac de plusieurs systèmes.

Q.1. Pour chaque cas déterminer si la réponse est celle d'un système stable, instable ou marginalement stable.

Stabilité à partir des pôles de la FTBF

On donne ci-dessous les pôles des FTBF de plusieurs systèmes. Pour chaque cas déterminer si le système est stable, instable ou marginalement stable.

Système 1 : -1 ; -2	Système 4 : -2+3j, -2-3j, -2	Système 7 : -1+j, -1-j
Système 2 : -3, -2, 0	Système 5 : -j, j, -1, 1	Système 8 : 2, -1, -3
Système 3 : -2+j, -2-j, 2j, -2j	Système 6 : -1, +1	Système 9 : -6, -4, 7

Application du critère de Routh

On donne le schéma bloc modélisant un système asservi. Déterminer l'expression du gain permettant d'obtenir un système stable.

Application du critère de Routh

On donne les FTBO de 3 systèmes asservis en retour unitaire. Déterminer, à l'aide du critère de Routh, si les systèmes sont stables en boucle fermée et donner les valeurs de K admissibles.

$$G_1(p) = \frac{K}{p \cdot (p+3) \cdot (p+4)}$$

$$G_2(p) = \frac{K \cdot (1+T \cdot p)}{p \cdot (p+1) \cdot (1+0,5 \cdot p)}$$

$$G_3(p) = \frac{K}{p^2 + 5p^2 + 8p + 5}$$

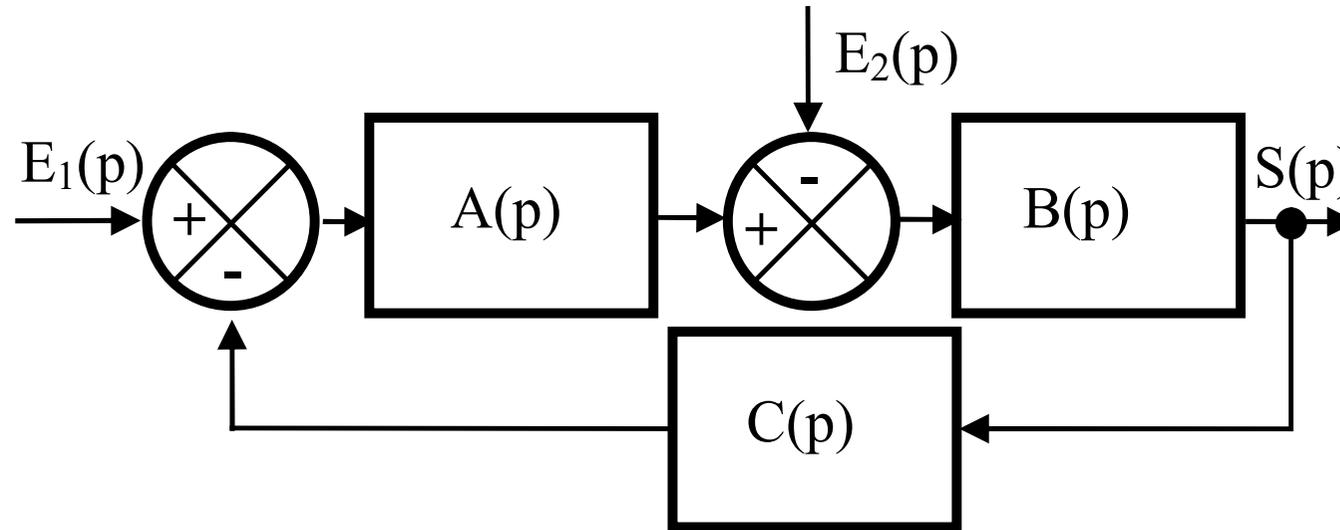
Florestan MATHURIN Page 1 sur 12

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

2.3. Etude de la stabilité des systèmes multis variables



Thm de superposition :

$$S(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_2(p)$$

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

2.3. Etude de la stabilité des systèmes multi variables

$$S(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} E_2(p)$$

Polynômes caractéristiques identiques sur les 2 FTBF

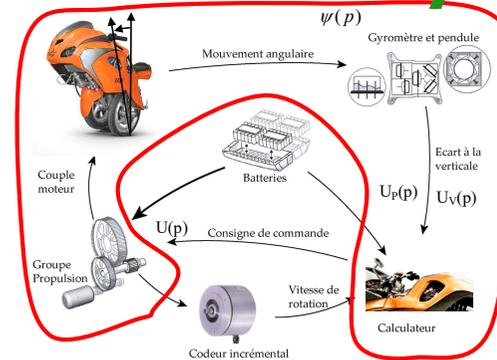
Pour étudier la stabilité d'un système multi variables, il suffit de ne regarder que la stabilité de la fonction de transfert en poursuite $S(p) / E_1(p)$.

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF

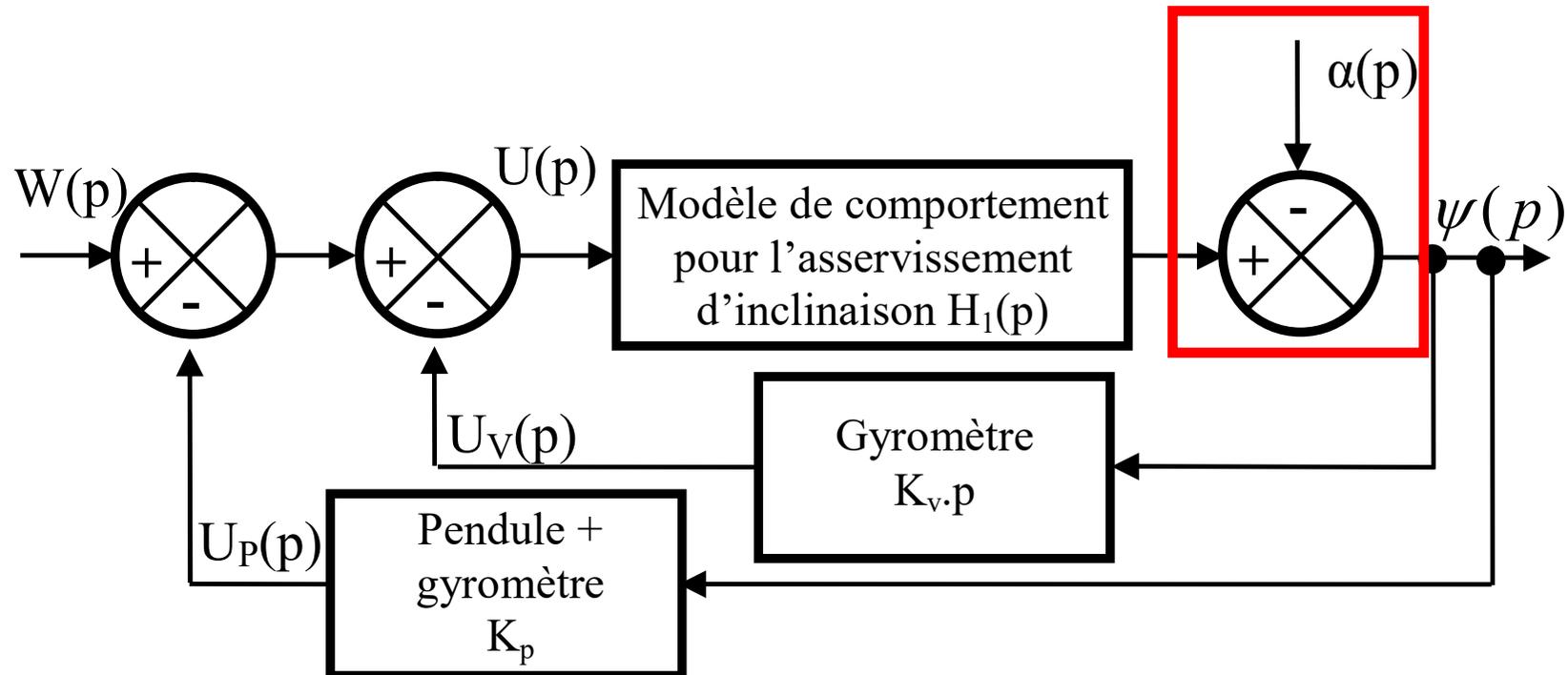


SII - F.MATHURIN

Exemple du scooter UNO III



Inclinaison du conducteur = perturbation



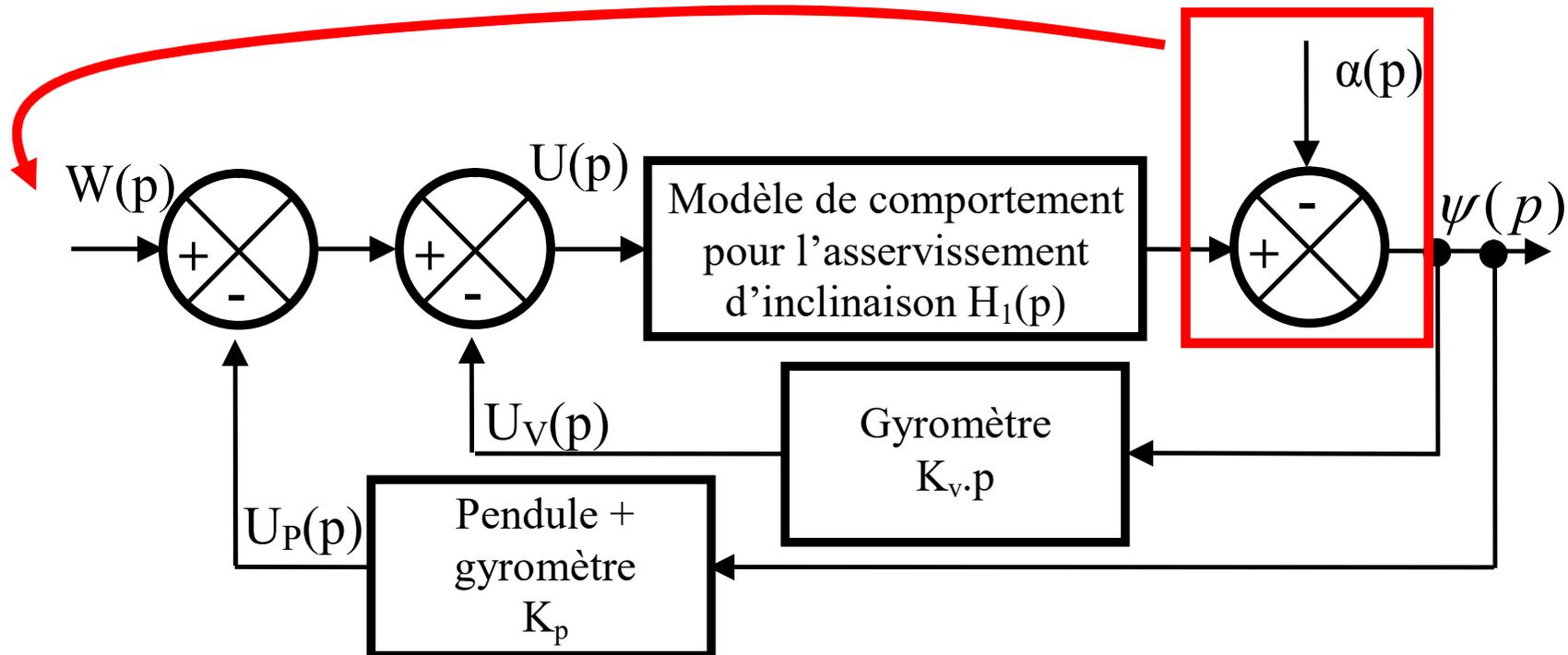
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

Inclinaison du conducteur = perturbation

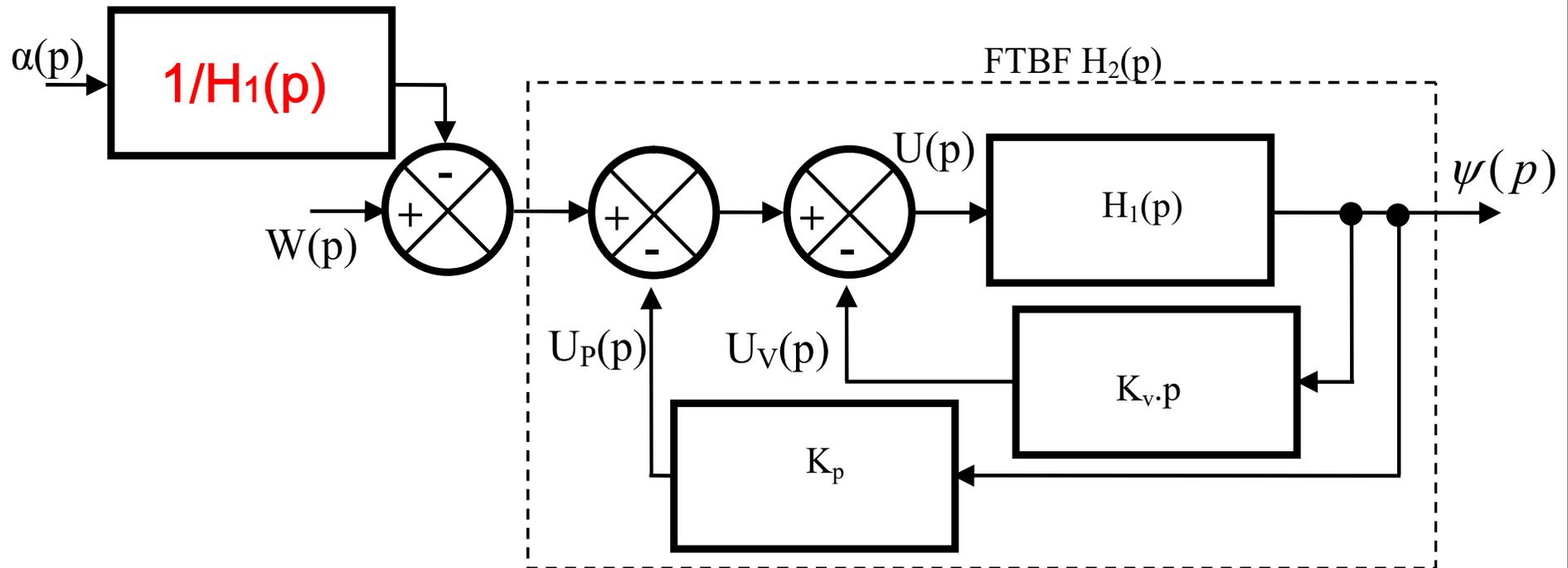


2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F.MATHURIN

Exemple du scooter UNO III



$$\psi(p) = \frac{H_1(p)}{1 + K_p \cdot H_1(p) + p \cdot K_v \cdot H_1(p)} \cdot W(p) - \frac{1}{1 + K_p \cdot H_1(p) + p \cdot K_v \cdot H_1(p)} \cdot \alpha(p)$$



1. Définitions

2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO

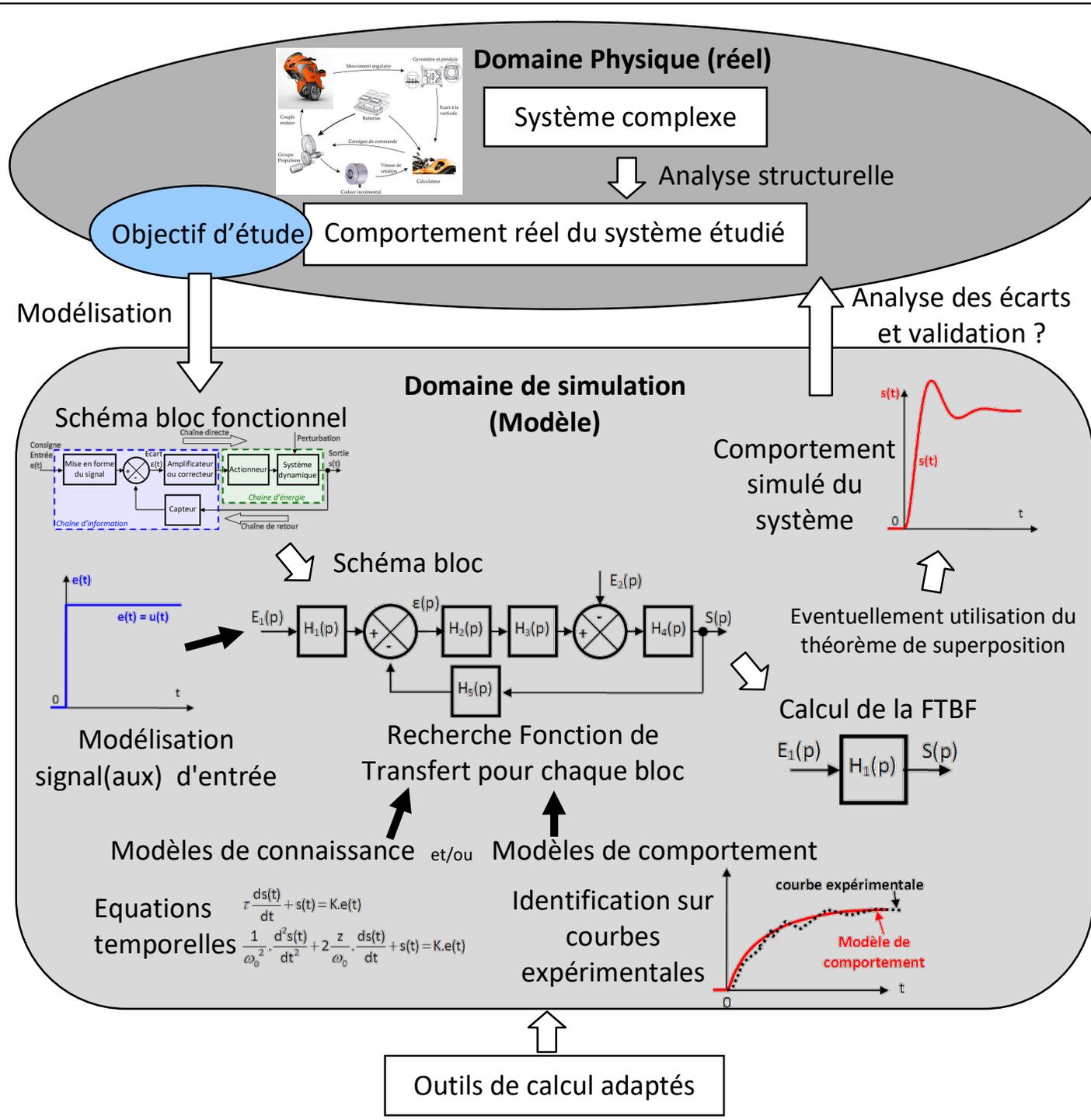
4. Causes d'instabilité

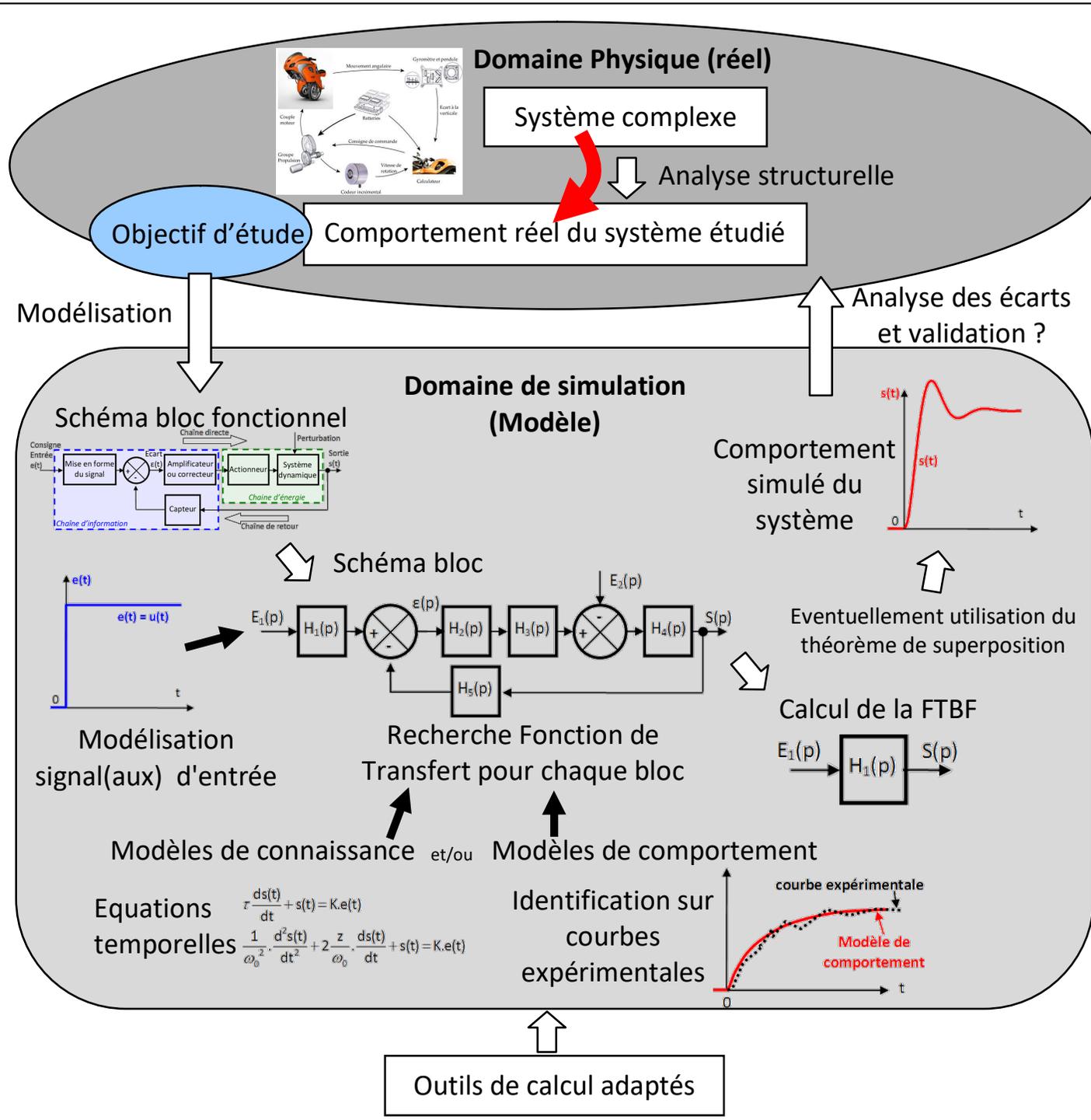
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO

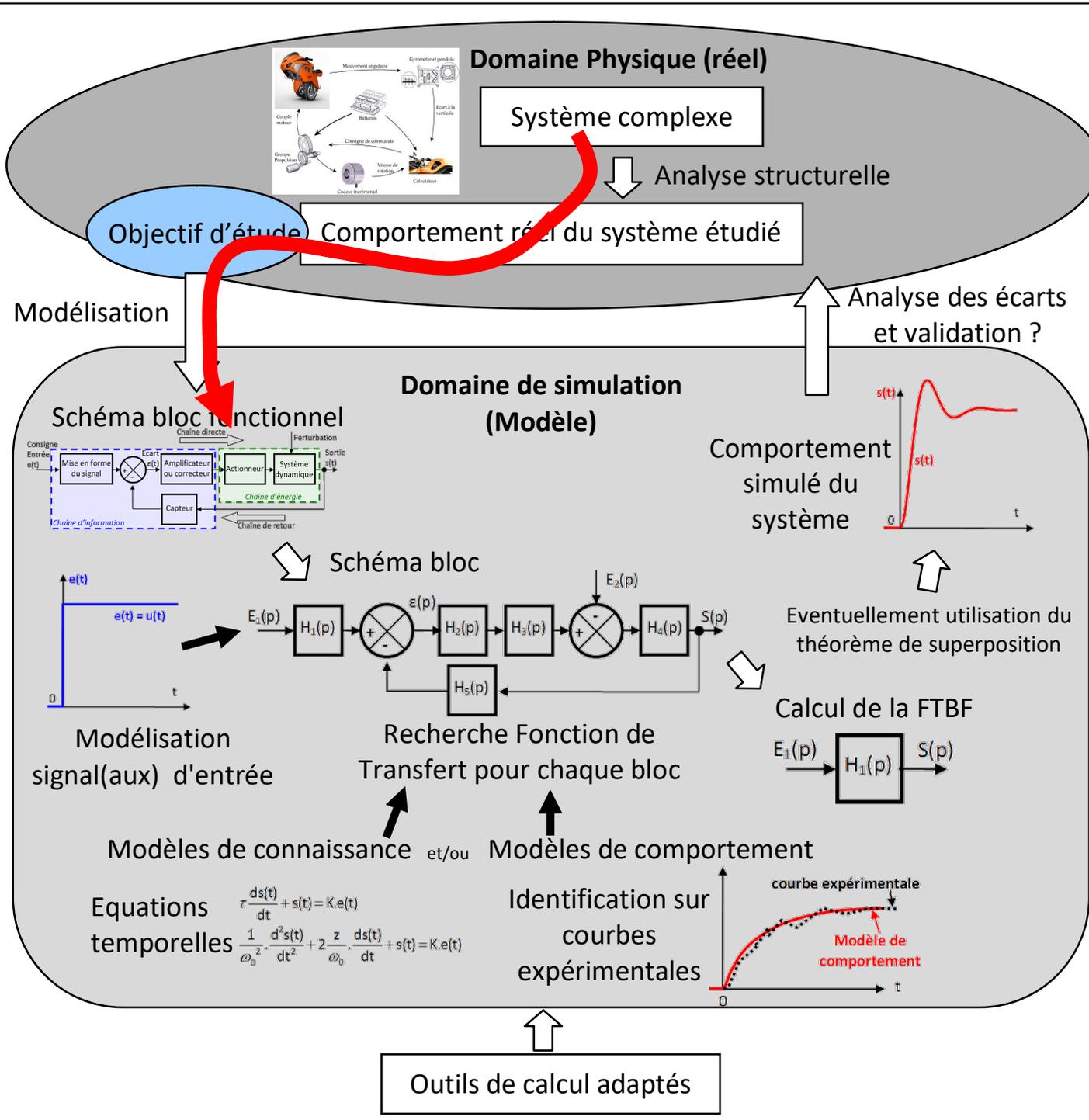


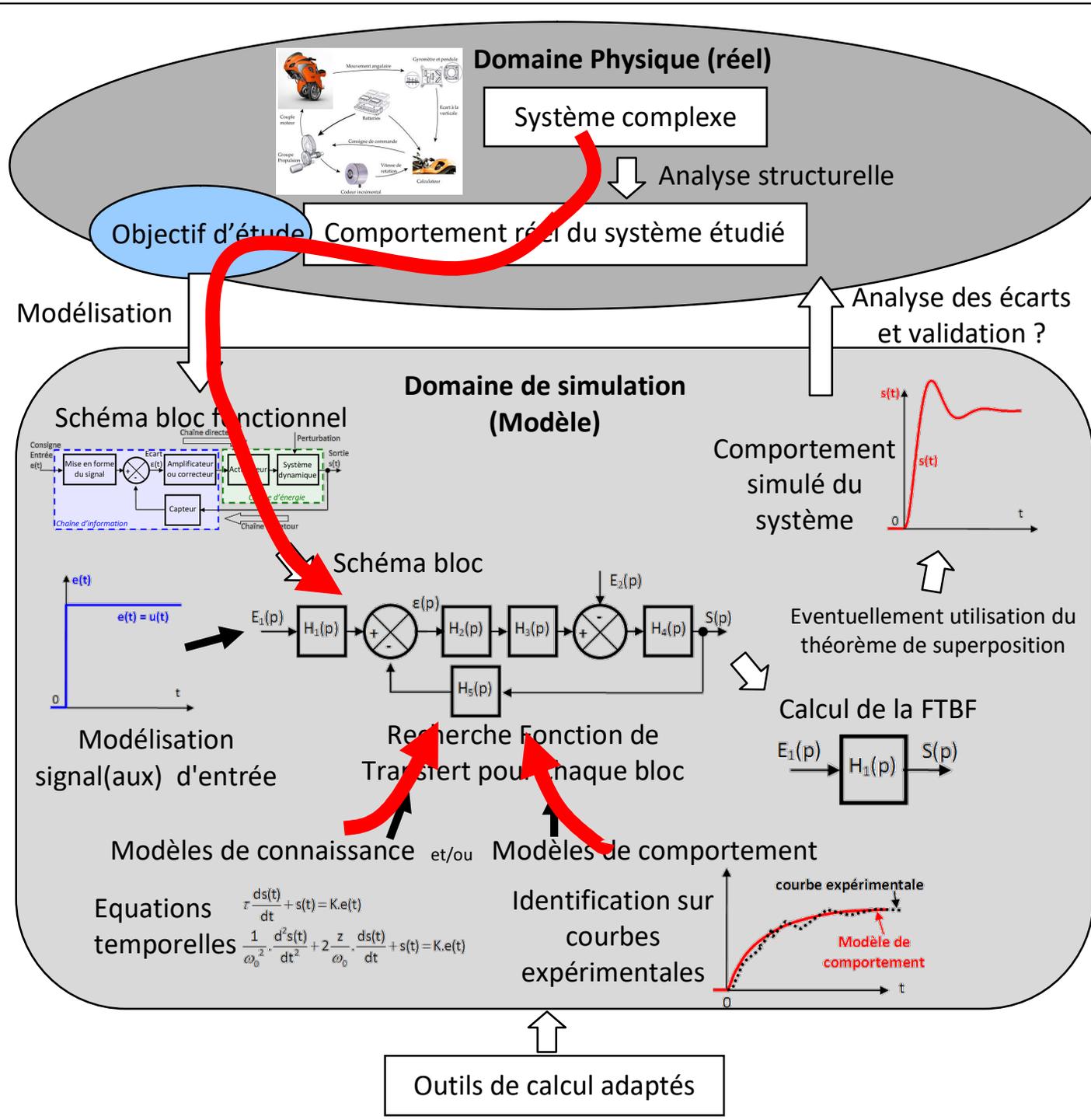
SII -F.MATHURIN

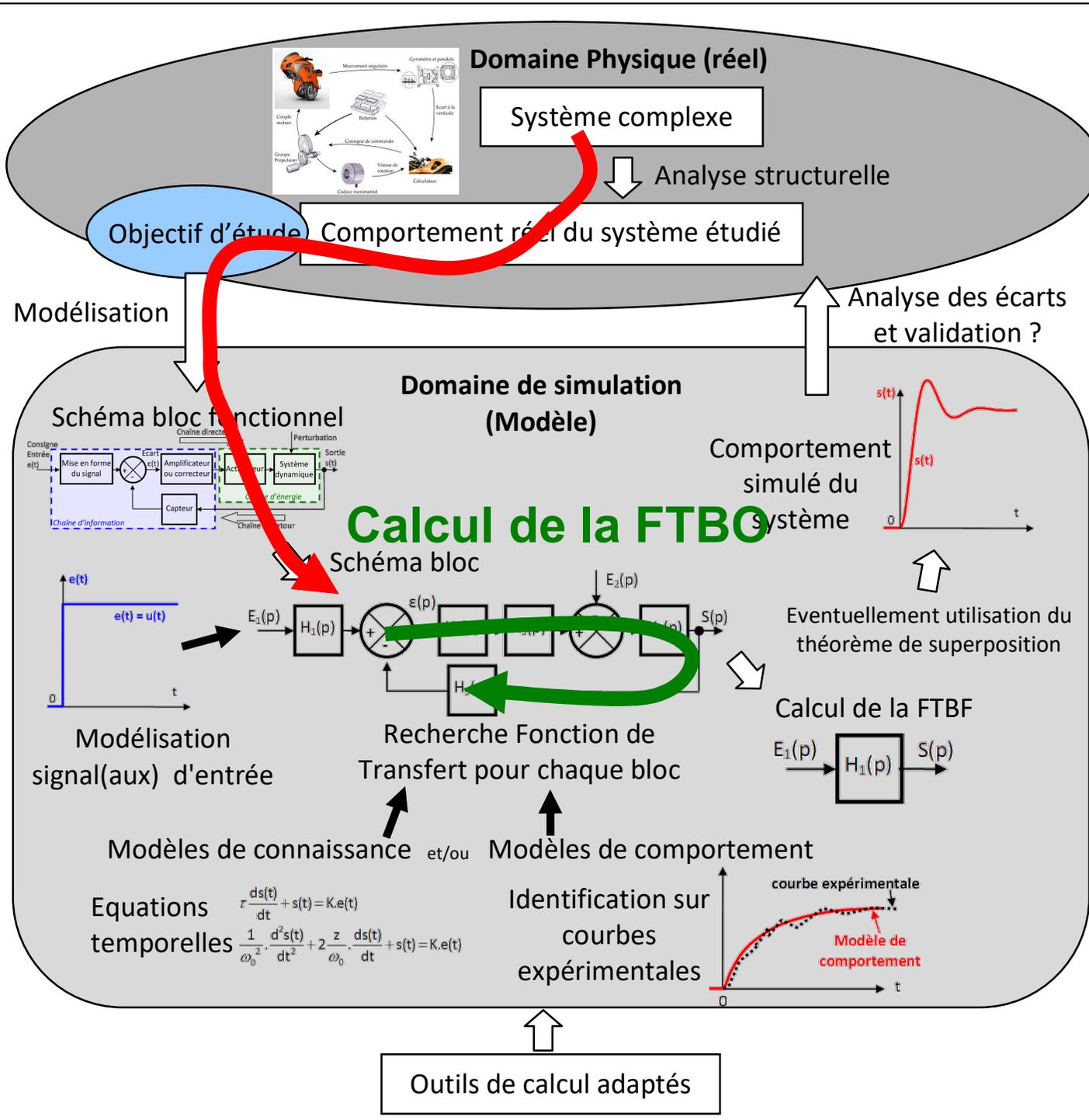
Dans la pratique, l'étude de la stabilité des systèmes bouclés se fait plutôt graphiquement dans le domaine fréquentiel à partir de la FTBO.







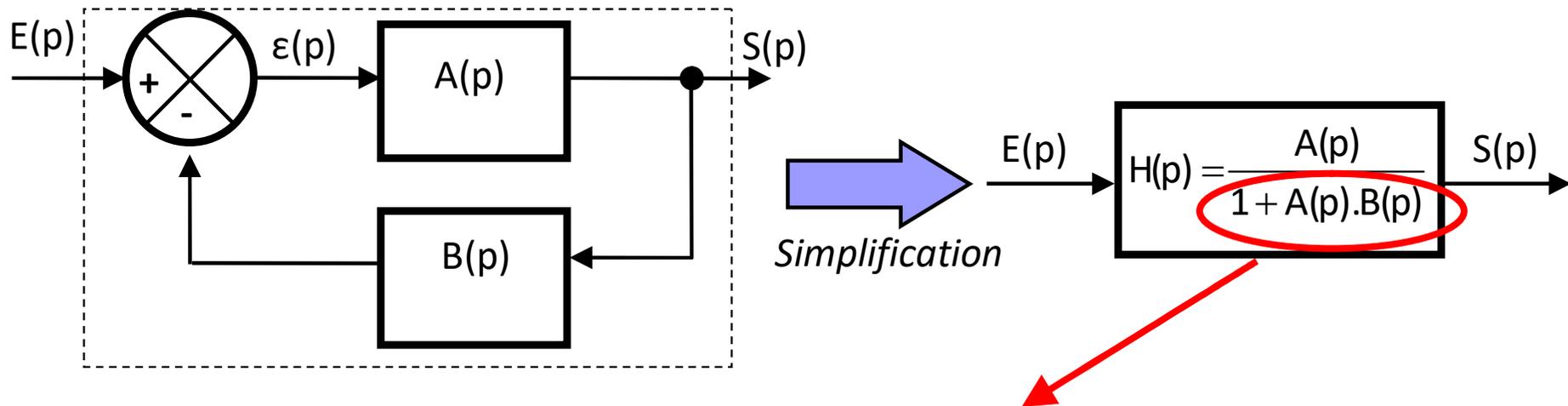




3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



3.1. Equation caractéristique et point critique – Définitions



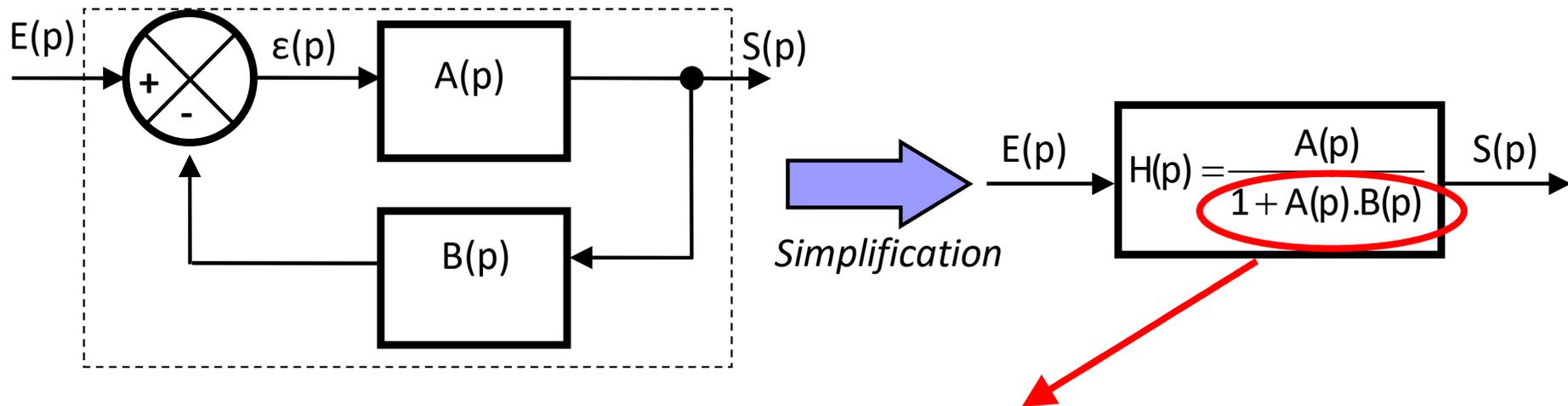
Equation caractéristique d'un système bouclé :

$$D(p) = 1 + \text{FTBO}(p) = 0$$

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



3.1. Equation caractéristique et point critique – Définitions

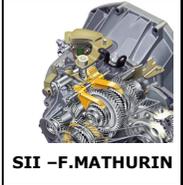


Equation caractéristique d'un système bouclé :

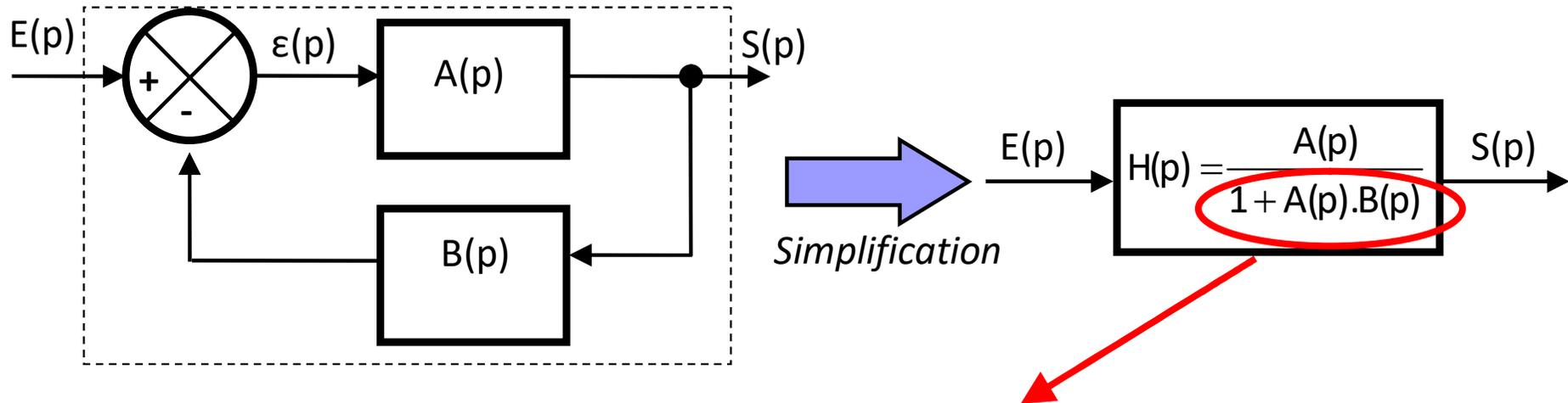
$$D(p) = 1 + \text{FTBO}(p) = 0$$

Le système est à la limite de stabilité si $\text{FTBO}(p) = -1$

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO

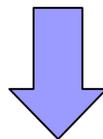


3.1. Equation caractéristique et point critique – Définitions



Equation caractéristique d'un système bouclé :

$$D(p) = 1 + \text{FTBO}(p) = 0$$



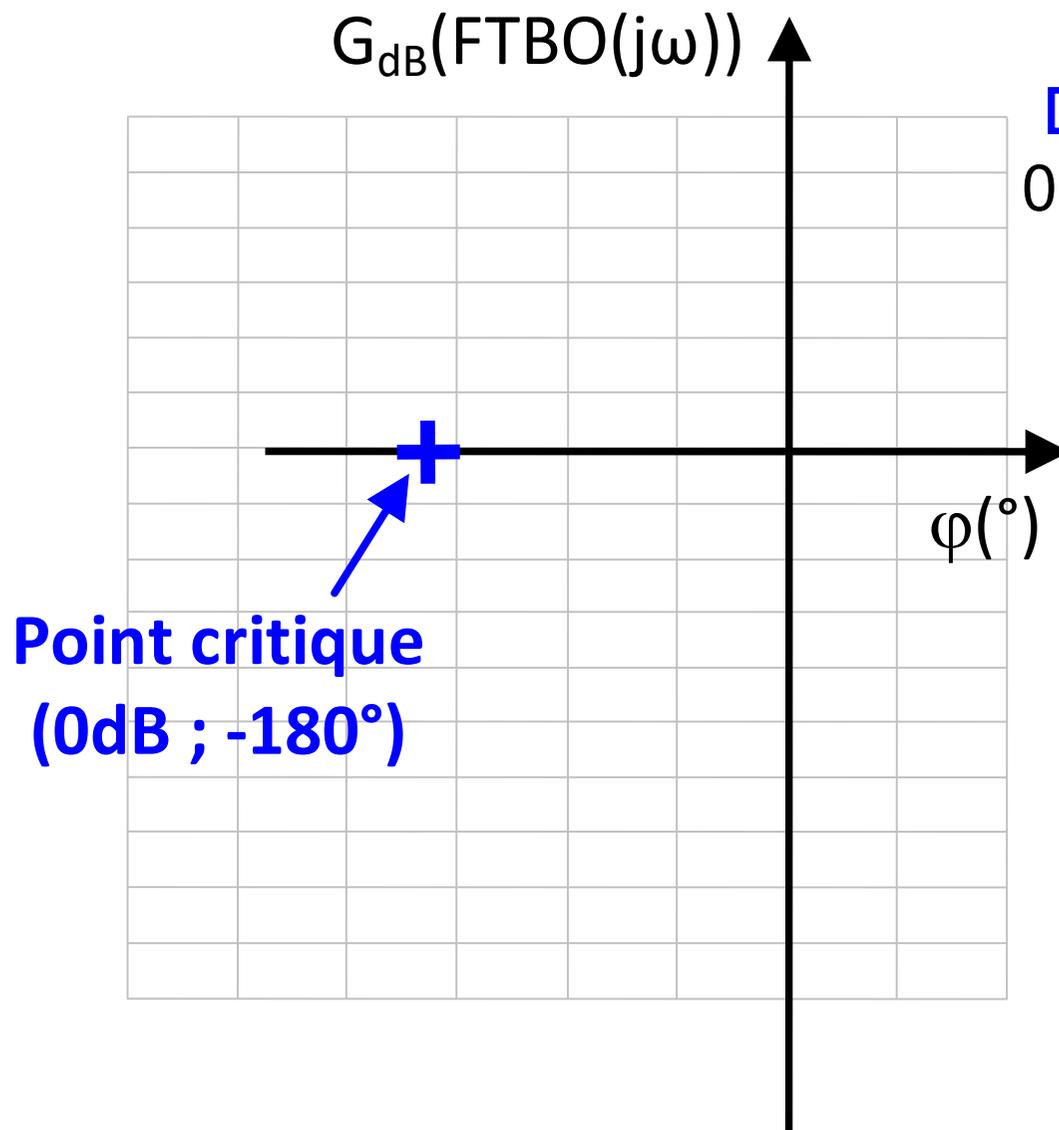
Le système est à la limite de stabilité si $\text{FTBO}(p) = -1$

Définition d'un point critique : d'affixe $z = -1$ dans le plan complexe (module 0 dB et argument -180° dans le plan de Black)

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F. MATHURIN



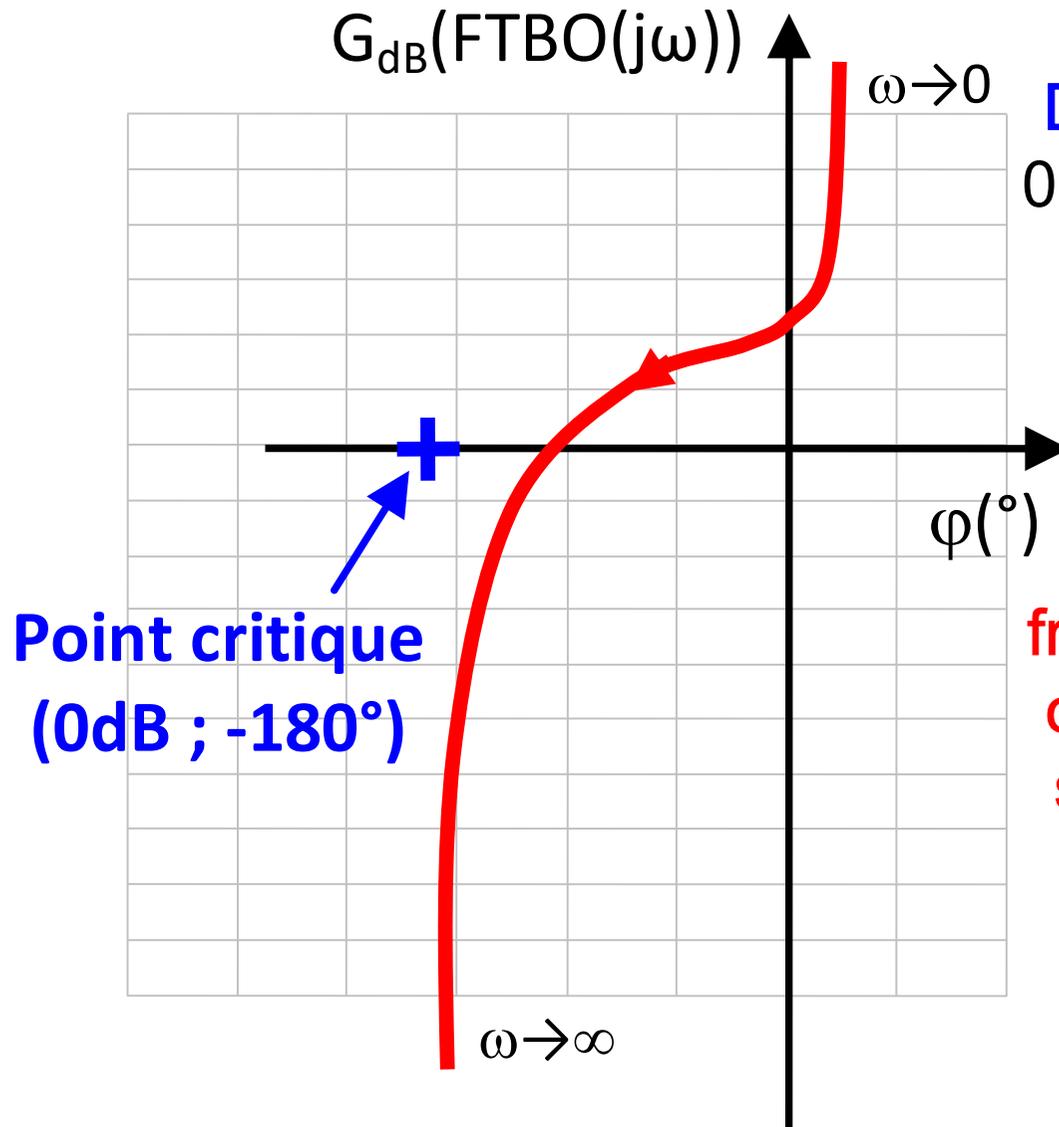
Définition du point critique :
0 dB et argument -180° dans le plan de Black

**Point critique
(0dB ; -180°)**

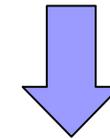
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F. MATHURIN



Définition du point critique :
0 dB et argument -180° dans
le plan de Black

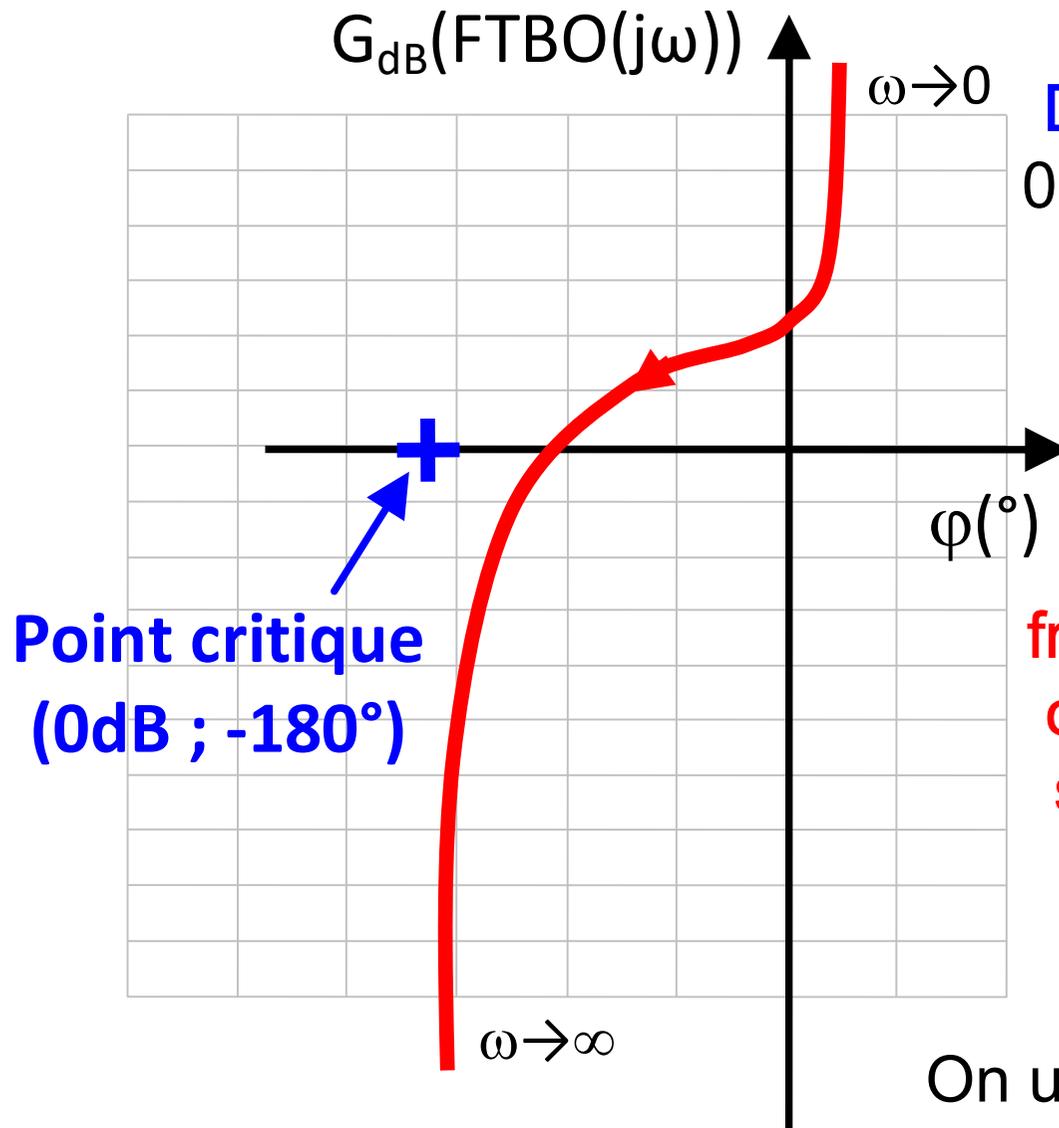


**On trace la réponse
fréquentielle de la FTBO et
on regarde où ce tracé se
situe par rapport au point
critique**

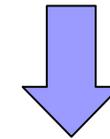
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



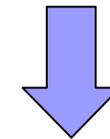
SII - F. MATHURIN



Définition du point critique :
0 dB et argument -180° dans
le plan de Black



**On trace la réponse
fréquentielle de la FTBO et
on regarde où ce tracé se
situe par rapport au point
critique**



On utilise un outil de diagnostic :
le critère du Revers

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII -F.MATHURIN

3.2. Critère du revers

C'est un critère simplifié qui n'est valable que si la FTBO ne possède que des pôles à partie réelle strictement négative (ce qui sera toujours le cas dans nos études)

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F. MATHURIN

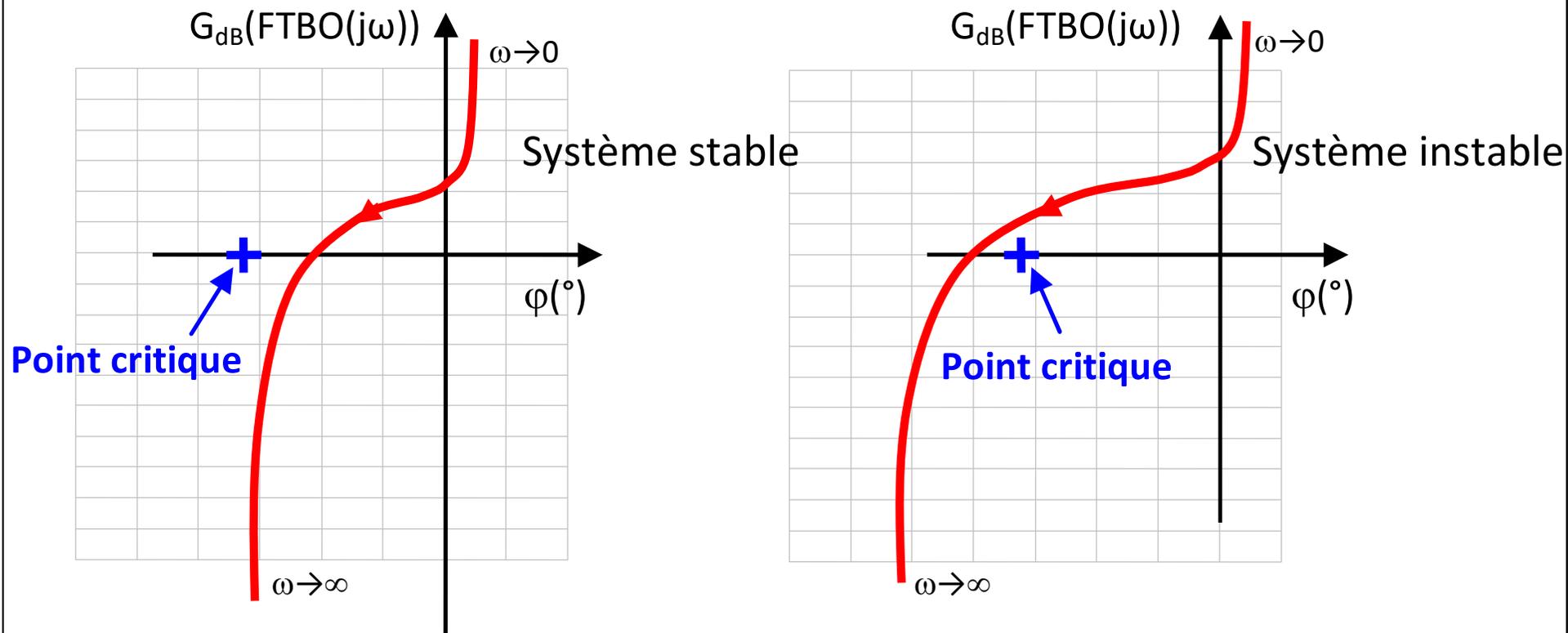
Critère du revers dans le plan de Black

Un système asservi, stable en BO, est asymptotiquement stable en BF si lorsque l'on parcourt le lieu de Black de sa fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p)$ dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique C à sa droite.

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



Critère du revers dans le plan de Black

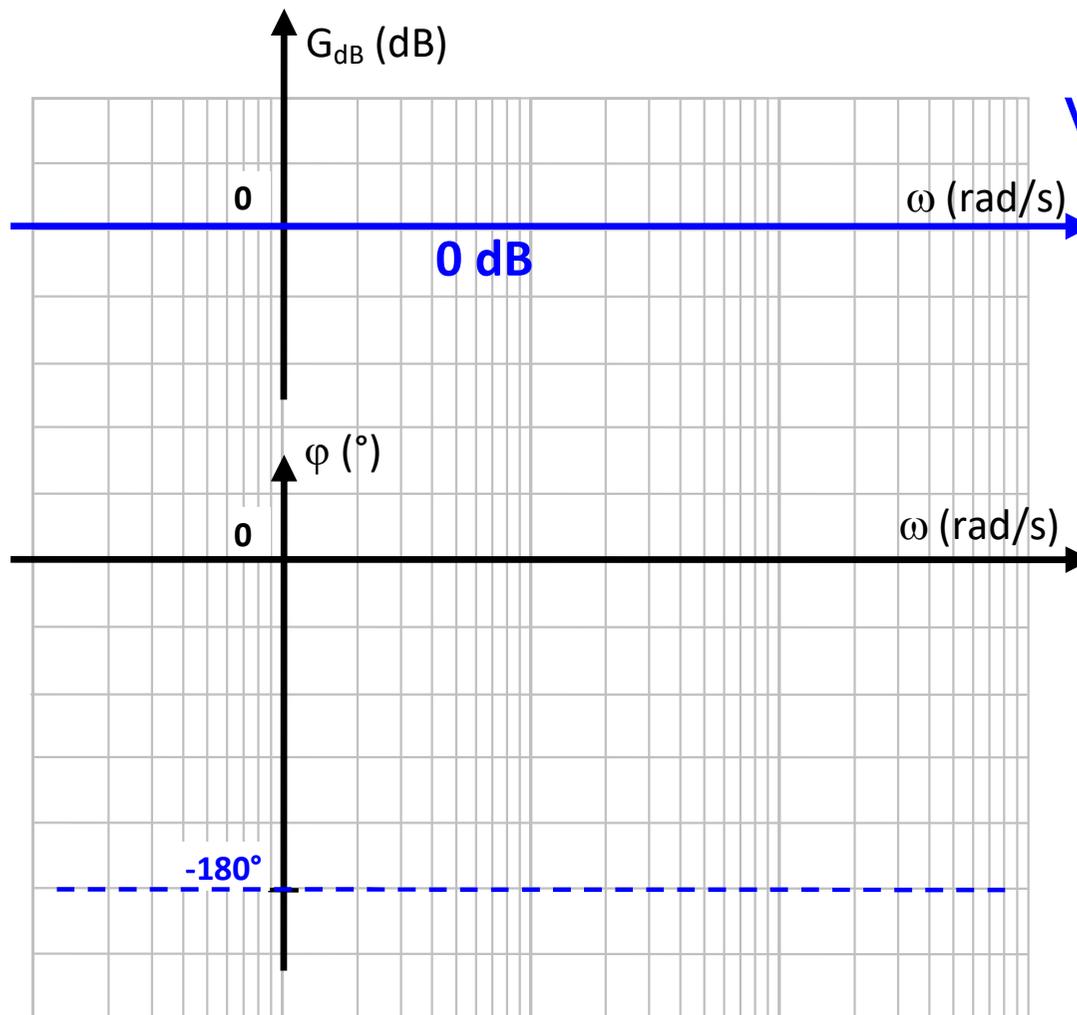


3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F.MATHURIN

Critère du revers dans le plan de Bode



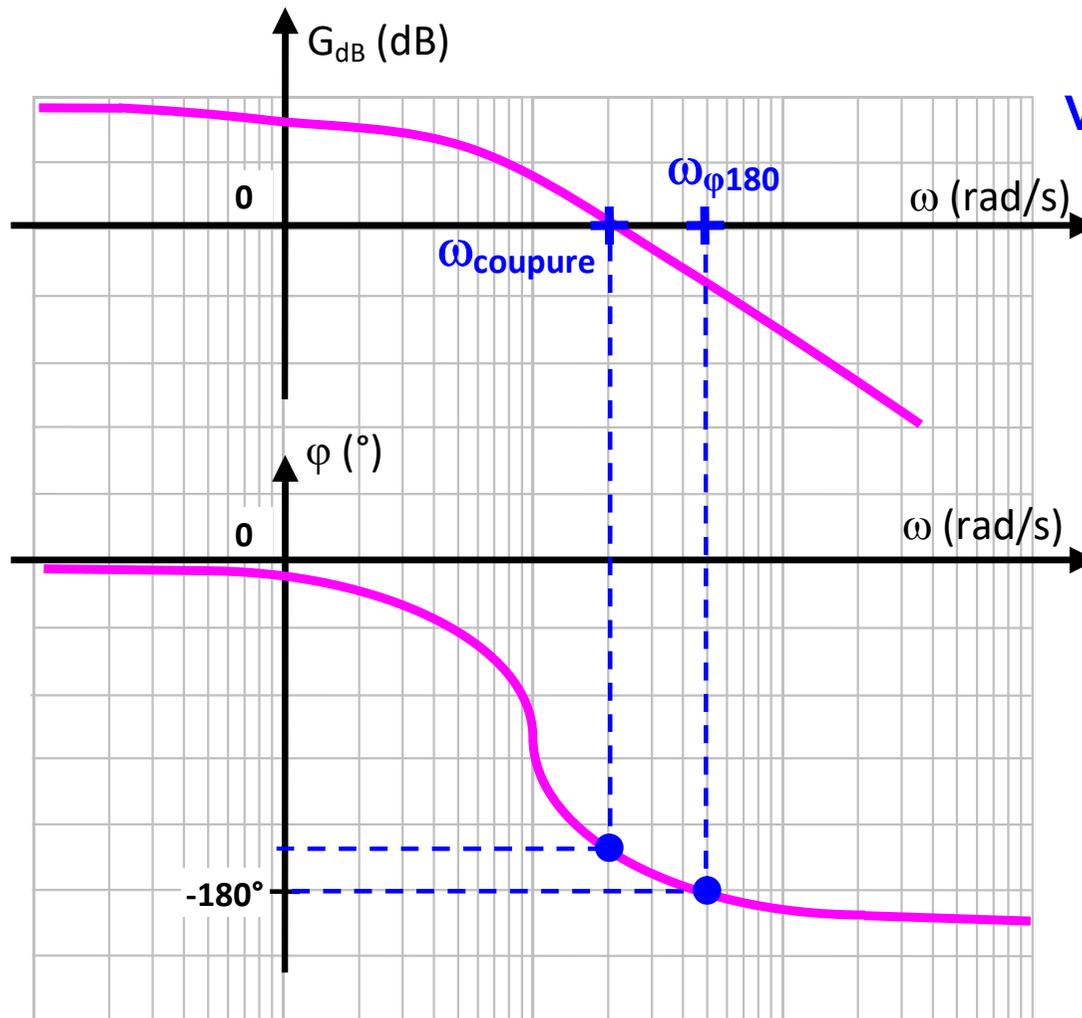
Pb : pas possible de visualiser le point critique ici

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO

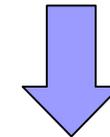


SII - F.MATHURIN

Critère du revers dans le plan de Bode



Pb : pas possible de visualiser le point critique ici

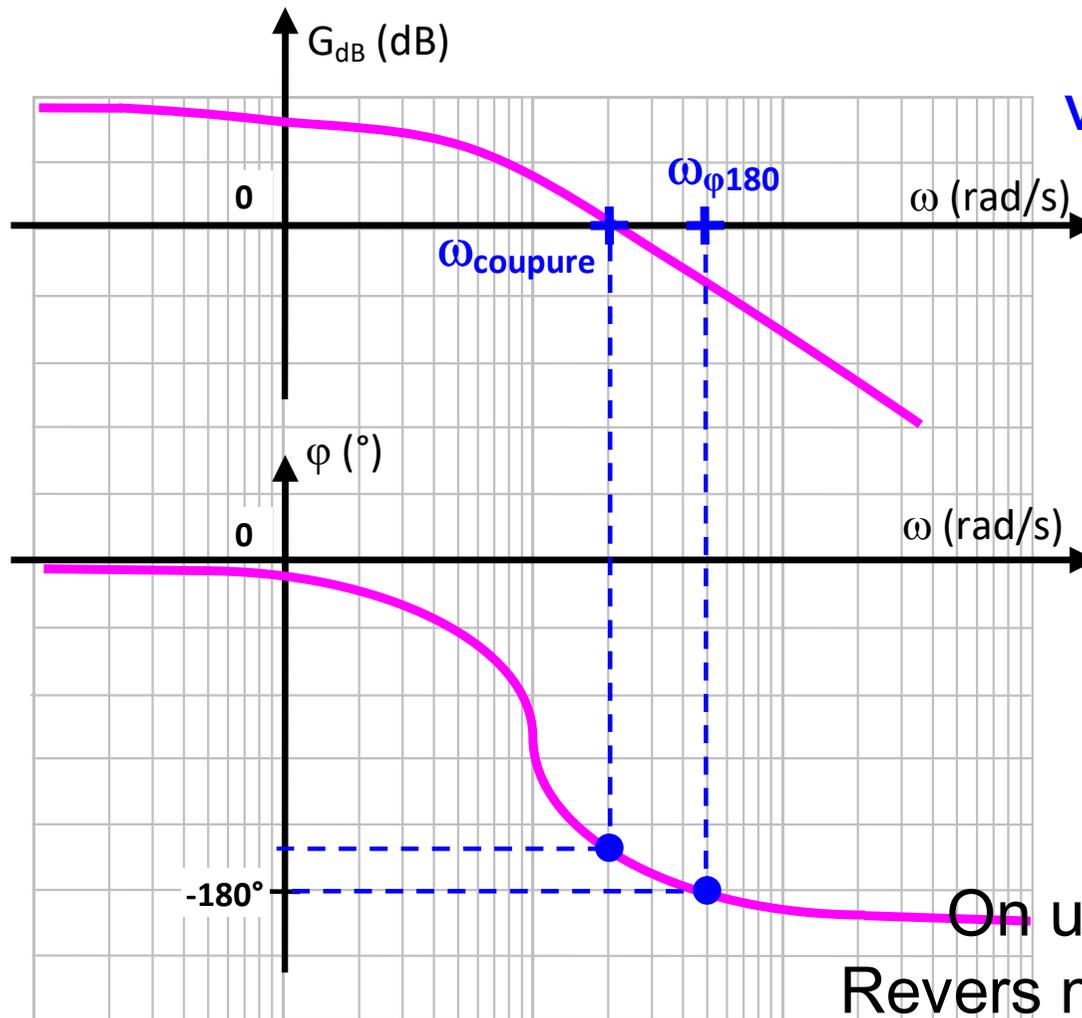


On trace la réponse fréquentielle de la FTBO et on identifie 2 pulsations caractéristiques $\omega_{coupure}$ et $\omega_{\phi 180}$

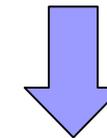
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



Critère du revers dans le plan de Bode

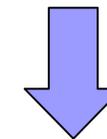


Pb : pas possible de visualiser le point critique ici



On trace la réponse fréquentielle de la FTBO et on identifie 2 pulsations caractéristiques $\omega_{coupure}$ et $\omega_{\phi 180}$

$\omega_{\phi 180}$



On utilise encore le critère du Revers mais adapté à ce diagramme

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F. MATHURIN

Critère du revers dans le plan de Bode

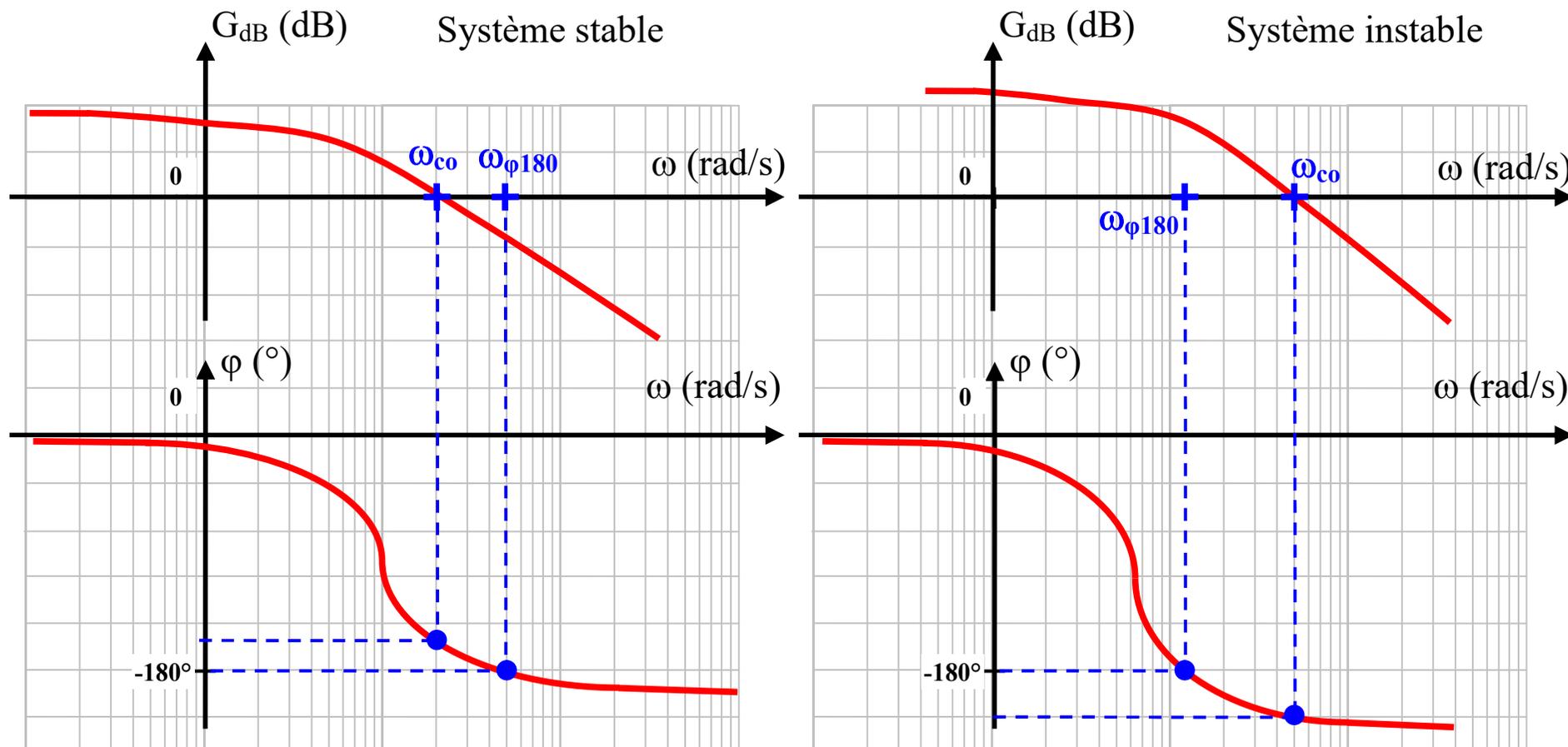
Un système asservi, stable en BO, est asymptotiquement stable en BF si :

- à la pulsation $\omega = \omega_{\varphi 180}$ pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})) = -180^\circ$, on a $|\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})| < 0\text{dB}$ ou bien,
- à la pulsation $\omega = \omega_{\text{co}}$ pour laquelle $|\text{FTBO}(j\omega_{\text{co}})| = 0\text{dB}$, on a $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\text{co}})) > -180^\circ$.

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



Critère du revers dans le plan de Bode



3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO

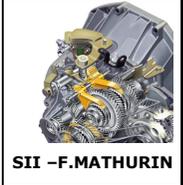


SII -F.MATHURIN

3.4. Marges de stabilité

Dans la pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité → marges de stabilité

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



3.4. Marges de stabilité

Dans la pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité → marges de stabilité

Marge de phase

La marge de phase est définie telle que :

$M\phi = 180^\circ + \arg(\text{FTBO}(j\omega_{co}))$ où ω_{co} est la pulsation de coupure pour laquelle $|\text{FTBO}(j\omega_{co})| = 0\text{dB}$.

Marge de gain

La marge de gain est définie telle que :

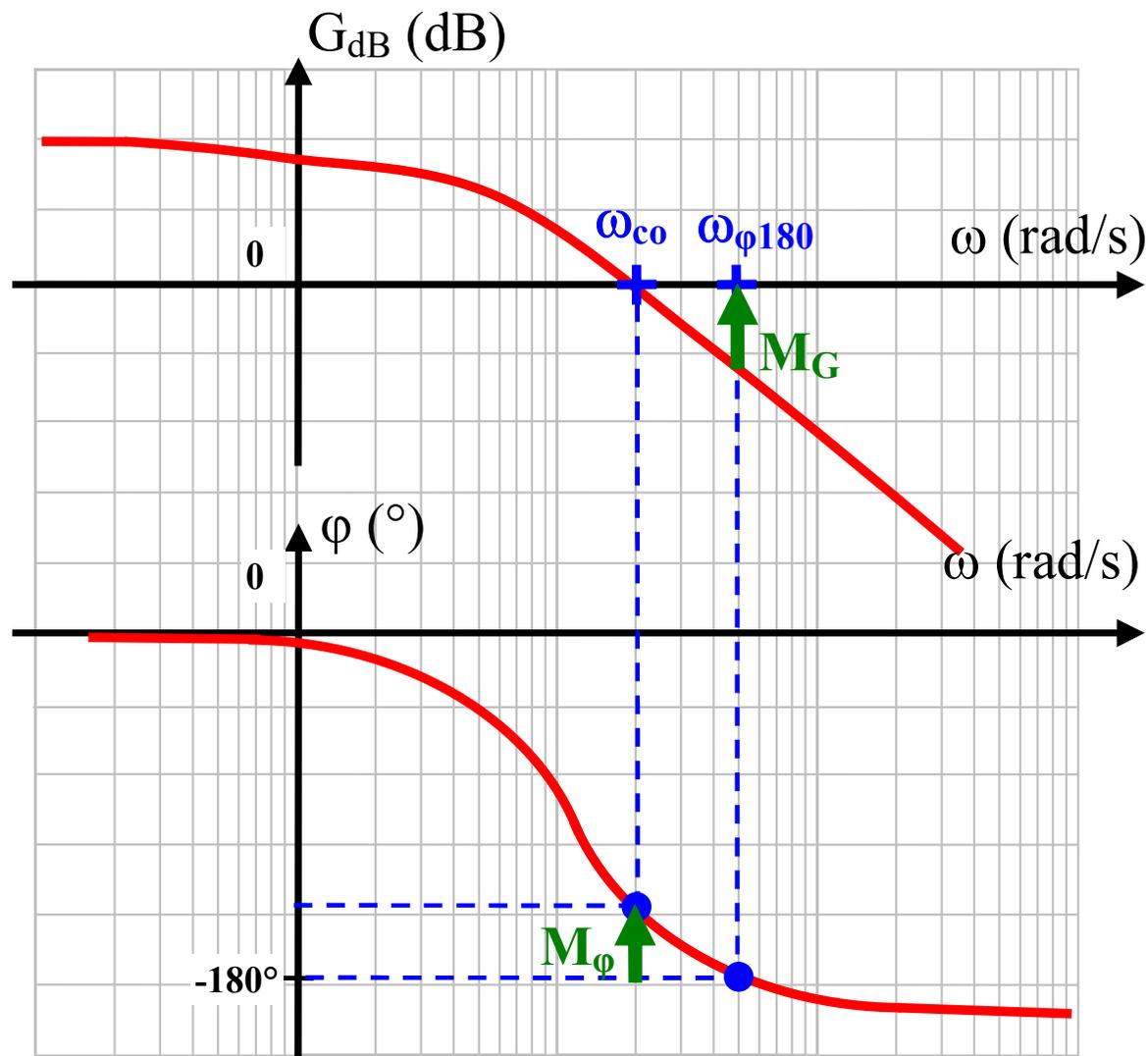
$MG = -20\log|\text{FTBO}(j\omega_{\phi 180})|$ où $\omega_{\phi 180}$ est la pulsation pour laquelle $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\phi 180})) = -180^\circ$.

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F.MATHURIN

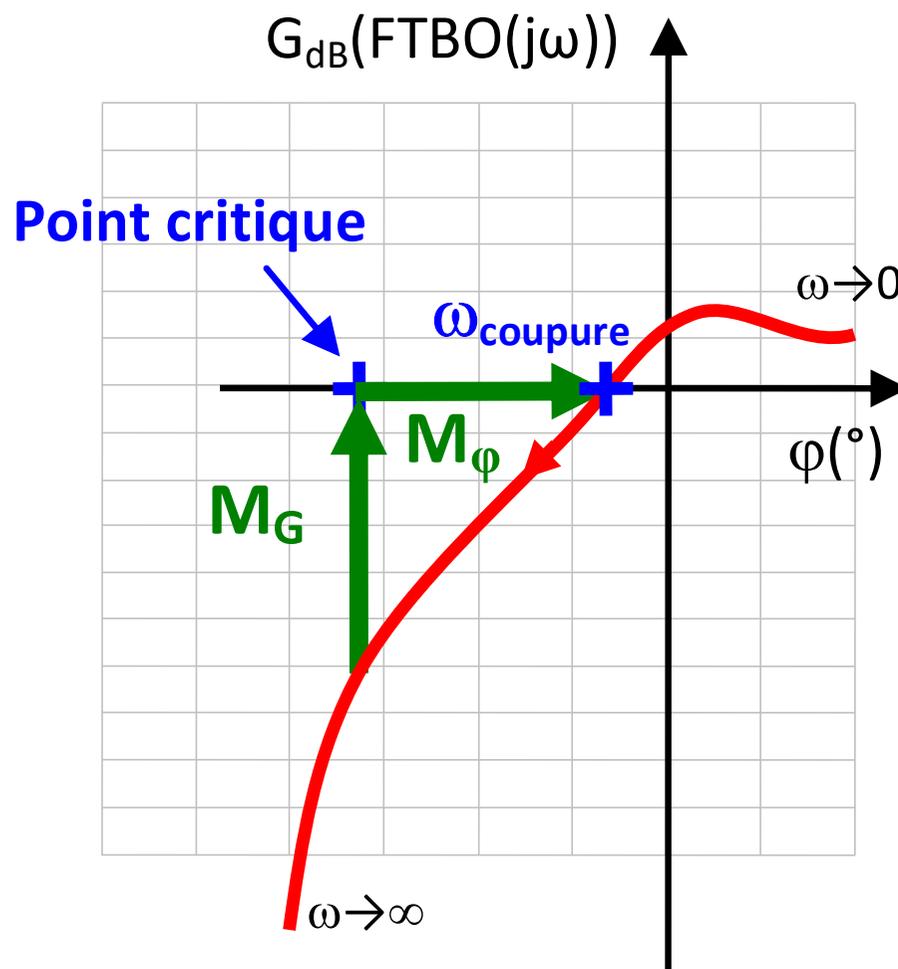
Marges de stabilité dans le plan de Bode



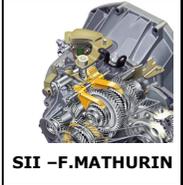
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



Marges de stabilité dans le plan de Black

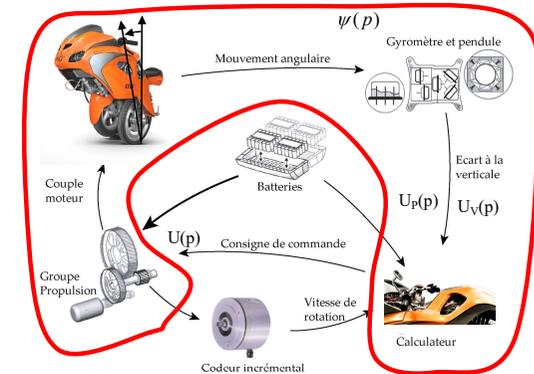
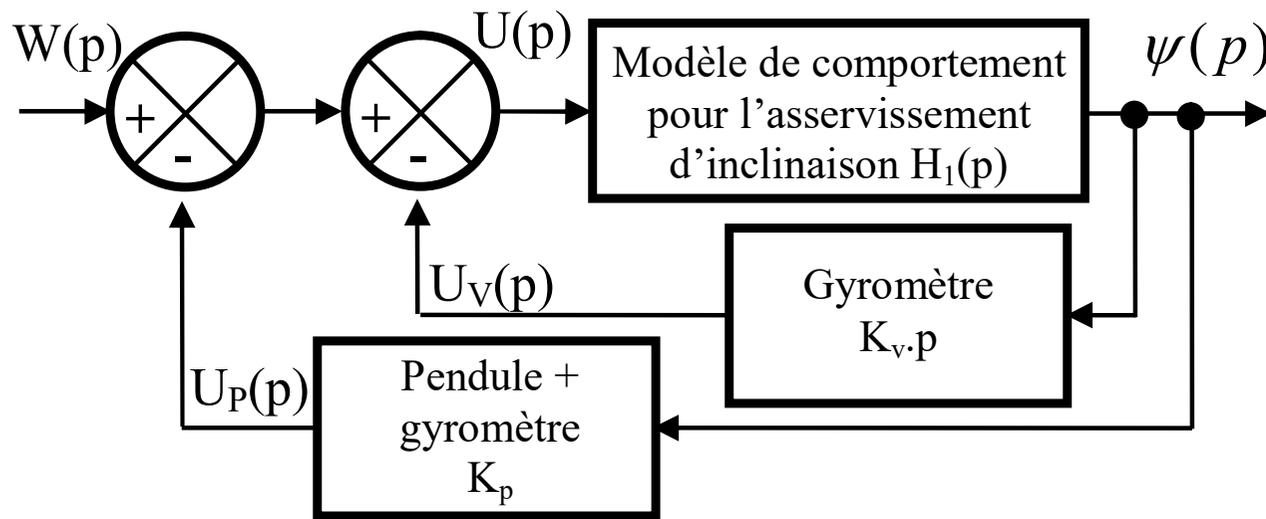


3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



Exemple du scooter UNO III

On a pour le moment un système dynamique stabilisé



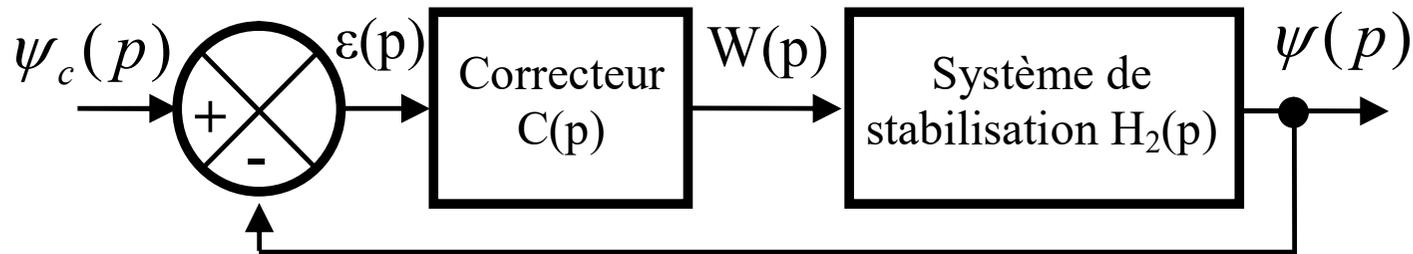
$$H_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



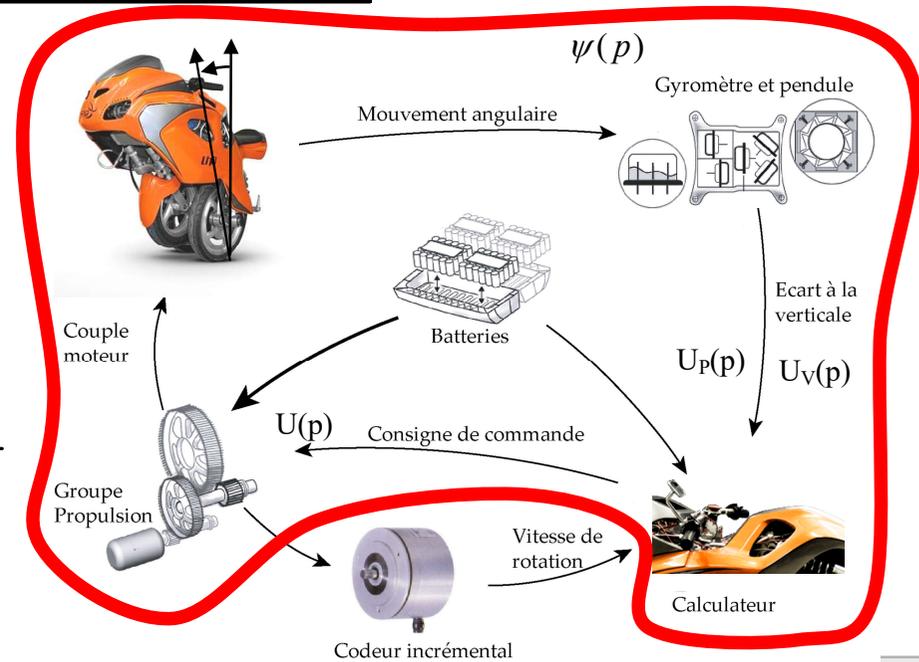
Exemple du scooter UNO III

On ajoute une boucle d'asservissement avec correcteur pour obtenir les performances attendues



$$C(p) = K_i \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot p}\right)$$

$$H_2(p) = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$



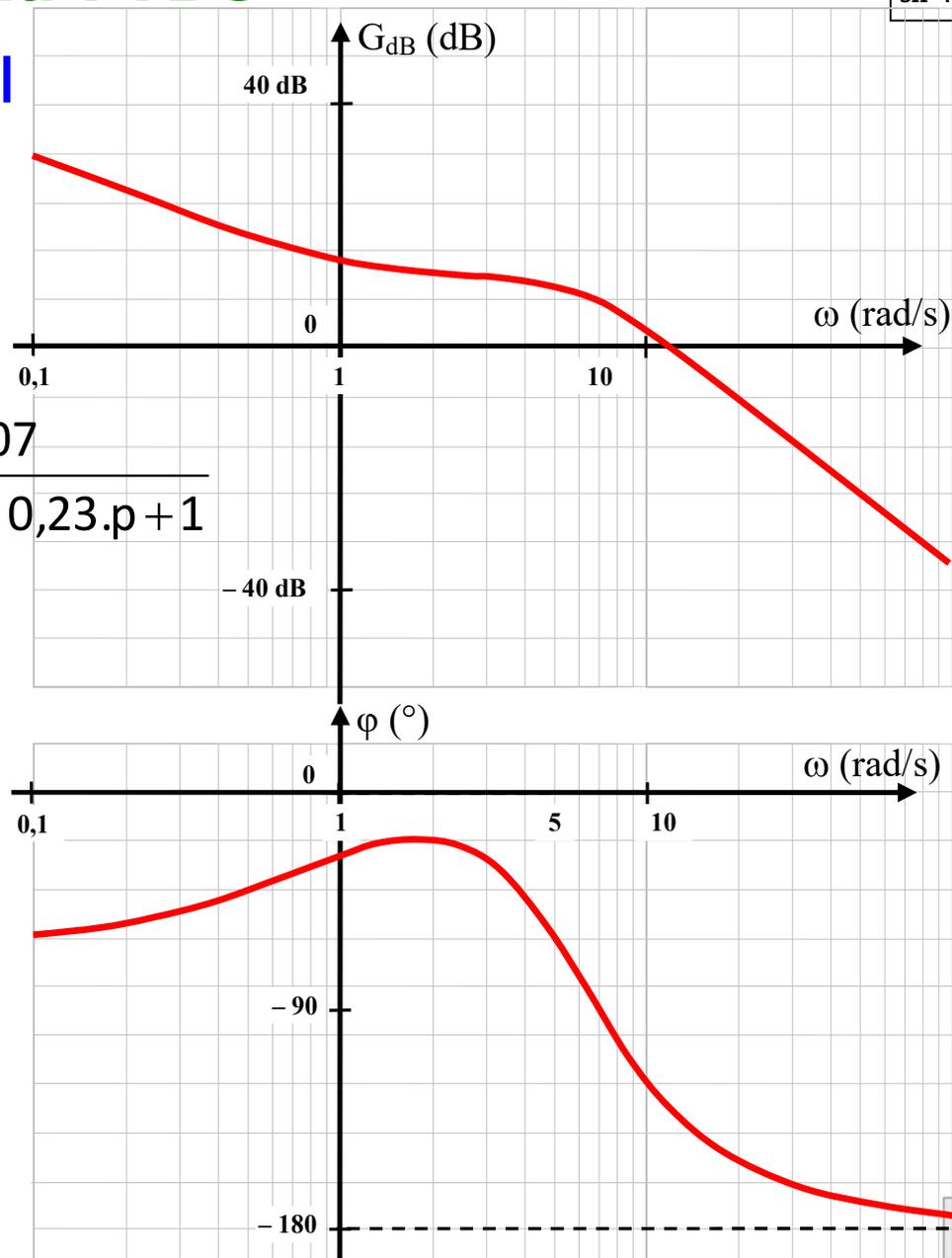
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F.MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

$$T(p) = 31,7 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,93 \cdot p}\right) \cdot \frac{0,107}{0,0265 \cdot p^2 + 0,23 \cdot p + 1}$$



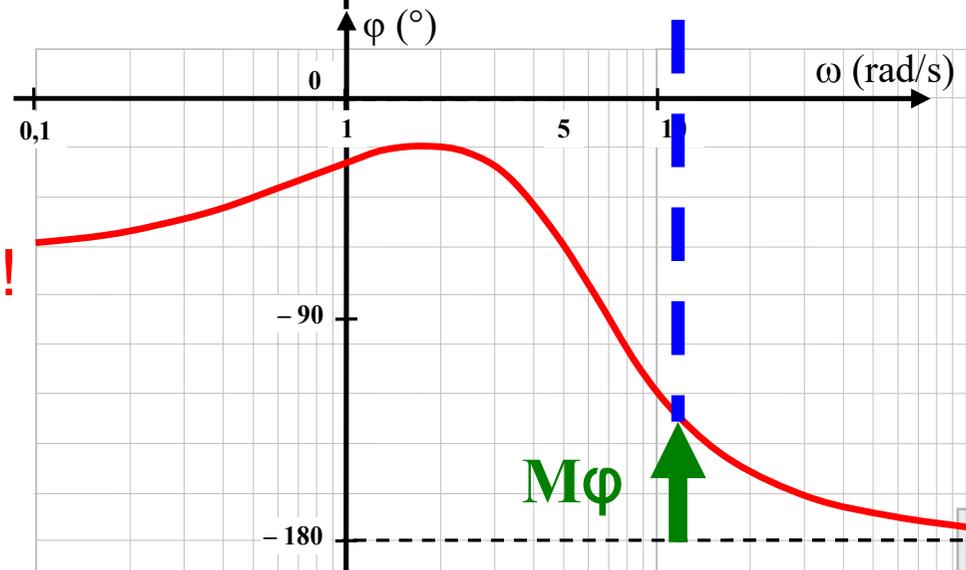
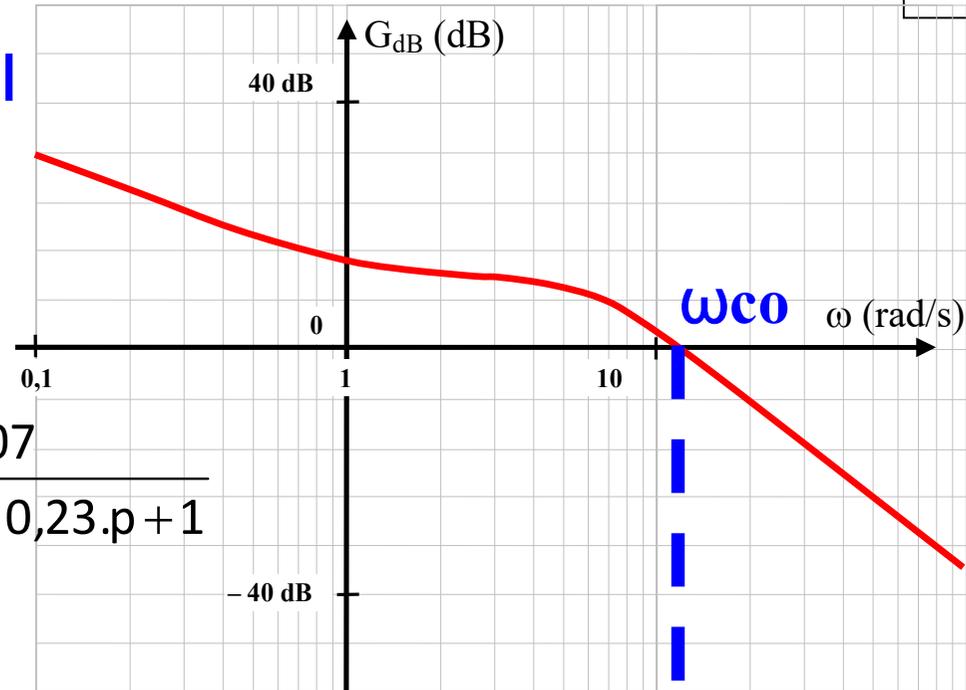
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F.MATHURIN

Exemple du scooter UNO III

$$T(p) = 31,7 \cdot \left(1 + \frac{1}{0,93 \cdot p}\right) \cdot \frac{0,107}{0,0265 \cdot p^2 + 0,23 \cdot p + 1}$$



On a réglé le correcteur afin d'obtenir notamment une marge de stabilité suffisante !

3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO



SII - F.MATHURIN

Application sur le TD 31

TD 07 - Sciences Industrielles pour l'ingénieur Lybè Ferret Toulouse - CPGE PSI*

Application du critère du revers

Q.1. On donne ci-dessous les lieux de transferts de plusieurs FTBO. Déterminer, à l'aide du critère du Revers si les systèmes sont stables en BF, puis pour les systèmes stables, déterminer les marges de gain et de phase.

Page 2 sur 19

Florestan MATHURIN



BILAN

Évaluer la stabilité en BF d'un système



SII -F.MATHURIN

Les critères sur la FTBF ne permettent pas de déterminer de marges de stabilité

Évaluer la stabilité en BF d'un système

Critères sur la FTBF

On calcule la FTBF et on récupère le dénominateur
= polynôme caractéristique $D(p)$



SII - F.MATHURIN



Les critères sur la FTBF ne permettent pas de déterminer de marges de stabilité

Évaluer la stabilité en BF d'un système

Critères sur la FTBF

On calcule la FTBF et on récupère le dénominateur = polynôme caractéristique $D(p)$

Analyse des pôles

$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

Stable ssi la FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.



Les critères sur la FTBF ne permettent pas de déterminer de marges de stabilité

Évaluer la stabilité en BF d'un système

Critères sur la FTBF

On calcule la FTBF et on récupère le dénominateur = polynôme caractéristique $D(p)$

Analyse des pôles

$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

Stable ssi la FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

Critère de Routh-Hurwitz

$$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$$

1^{er} examen : Si certains a_i sont négatifs ou nuls, le système est instable

2^{ème} examen : Si tous les a_i sont >0 , il faut vérifier que $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$



Les critères sur la FTBF ne permettent pas de déterminer de marges de stabilité

Évaluer la stabilité en BF d'un système

Critères sur la FTBF

On calcule la FTBF et on récupère le dénominateur = polynôme caractéristique $D(p)$

Analyse des pôles

$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

Stable ssi la FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

Critère de Routh-Hurwitz

$$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$$

1^{er} examen : Si certains a_i sont négatifs ou nuls, le système est instable

2^{ème} examen : Si tous les a_i sont >0 , il faut vérifier que $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Poursuite/régulation

On travaille toujours avec la FTBF en poursuite. Si un système est stable en poursuite, il est aussi en régulation (même dénominateur)



Évaluer la stabilité en BF d'un système

Les critères sur la FTBF ne permettent pas de déterminer de marges de stabilité

La FTBF a pour dénominateur :
 $D(p) = 1 + FTBO$

On évalue la stabilité de la BF à partir de la FTBO (+ facile à calculer que la FTBF)

Critères sur la FTBF

On calcule la FTBF et on récupère le dénominateur = polynôme caractéristique $D(p)$

Critères sur la FTBO

Analyse des pôles

$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

Stable ssi la FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

Critère de Routh-Hurwitz

$$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$$

1^{er} examen : Si certains a_i sont négatifs ou nuls, le système est instable

2^{ème} examen : Si tous les a_i sont >0 , il faut vérifier que $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Poursuite/régulation

On travaille toujours avec la FTBF en poursuite. Si un système est stable en poursuite, il est aussi en régulation (même dénominateur)



Évaluer la stabilité en BF d'un système

Les critères sur la FTBF ne permettent pas de déterminer de marges de stabilité

La FTBF a pour dénominateur :
 $D(p) = 1 + FTBO$

On évalue la stabilité de la BF à partir de la FTBO (+ facile à calculer que la FTBF)

Critères sur la FTBF

On calcule la FTBF et on récupère le dénominateur = polynôme caractéristique $D(p)$

Critères sur la FTBO

Critère graphique simplifié (le seul au programme) découlant du critère de Nyquist. Permet d'évaluer des marges de stabilité.

Analyse des pôles

$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

Stable ssi la FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

Critère du revers

Critère de Routh-Hurwitz

$$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$$

1^{er} examen : Si certains a_i sont négatifs ou nuls, le système est instable

2^{ème} examen : Si tous les a_i sont >0 , il faut vérifier que $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Poursuite/régulation

On travaille toujours avec la FTBF en poursuite. Si un système est stable en poursuite, il est aussi en régulation (même dénominateur)



SII - F. MATHURIN

Les critères sur la FTBF ne permettent pas de déterminer de marges de stabilité

Évaluer la stabilité en BF d'un système

La FTBF a pour dénominateur :
 $D(p) = 1 + FTBO$

On évalue la stabilité de la BF à partir de la FTBO (+ facile à calculer que la FTBF)

Critères sur la FTBF

Critères sur la FTBO

On calcule la FTBF et on récupère le dénominateur = polynôme caractéristique $D(p)$

Critère graphique simplifié (le seul au programme) découlant du critère de Nyquist. Permet d'évaluer des marges de stabilité.

Analyse des pôles

Critère du revers

Stable si :

à $\omega = \omega_{\varphi 180} \rightarrow G_{dB} < 0dB$
ou si à $\omega_{coupure} \rightarrow \varphi > -180^\circ$

$$D(p) = (p - p_1) \dots (p - p_i) \dots (p - p_n)$$

Stable ssi la FTBF possède :

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

Bode

Critère de Routh-Hurwitz

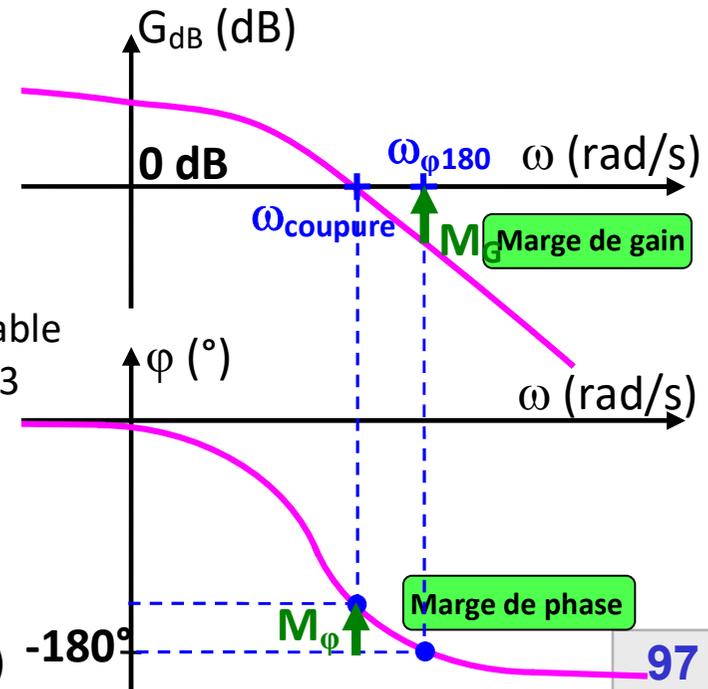
$$D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$$

1^{er} examen : Si certains a_i sont négatifs ou nuls, le système est instable

2^{ème} examen : Si tous les a_i sont >0 , il faut vérifier que $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Poursuite/régulation

On travaille toujours avec la FTBF en poursuite. Si un système est stable en poursuite, il est aussi en régulation (même dénominateur)





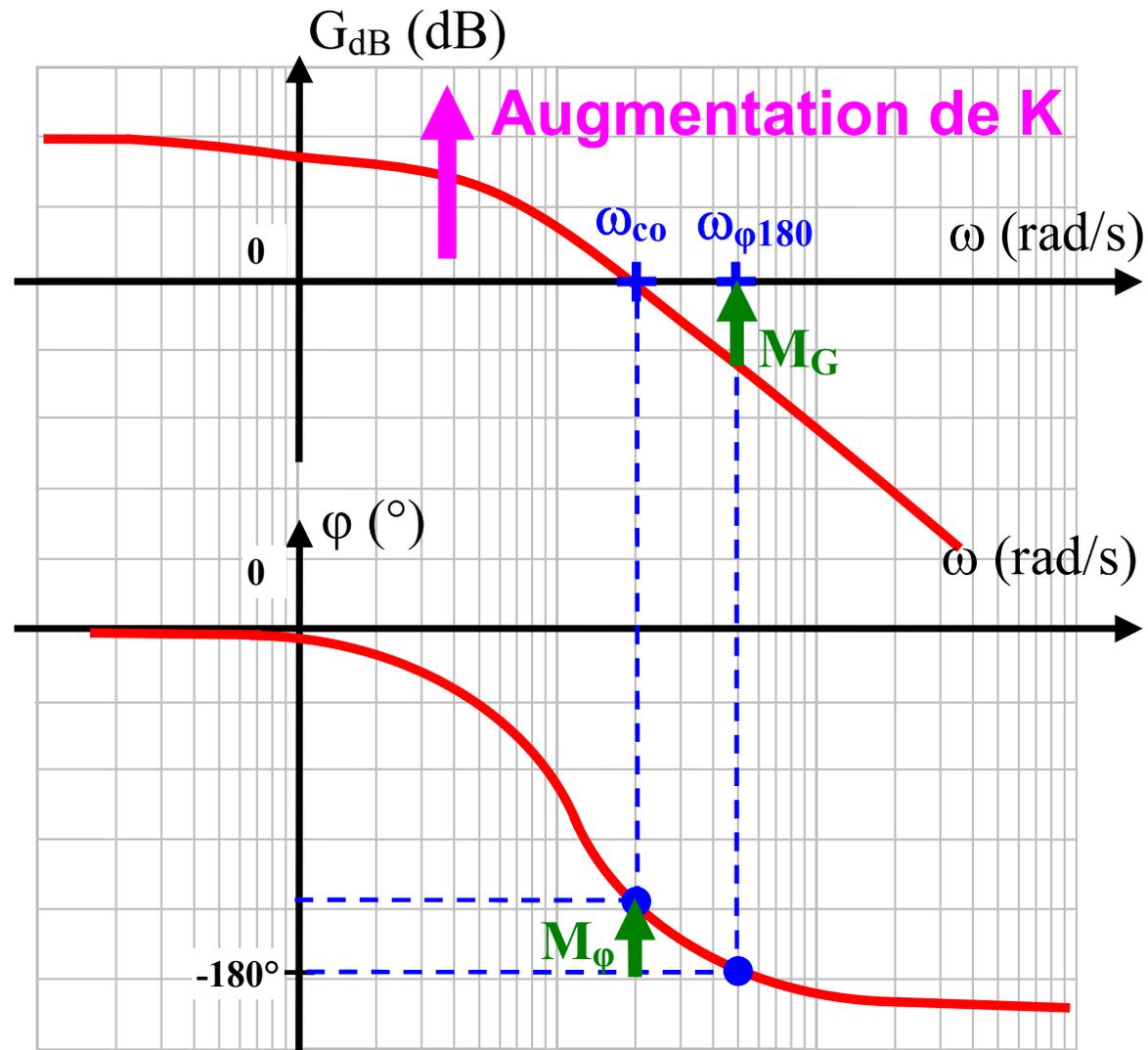
1. Définitions
2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF
3. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBO
- 4. Causes d'instabilité**

4. Causes d'instabilité



SII - F.MATHURIN

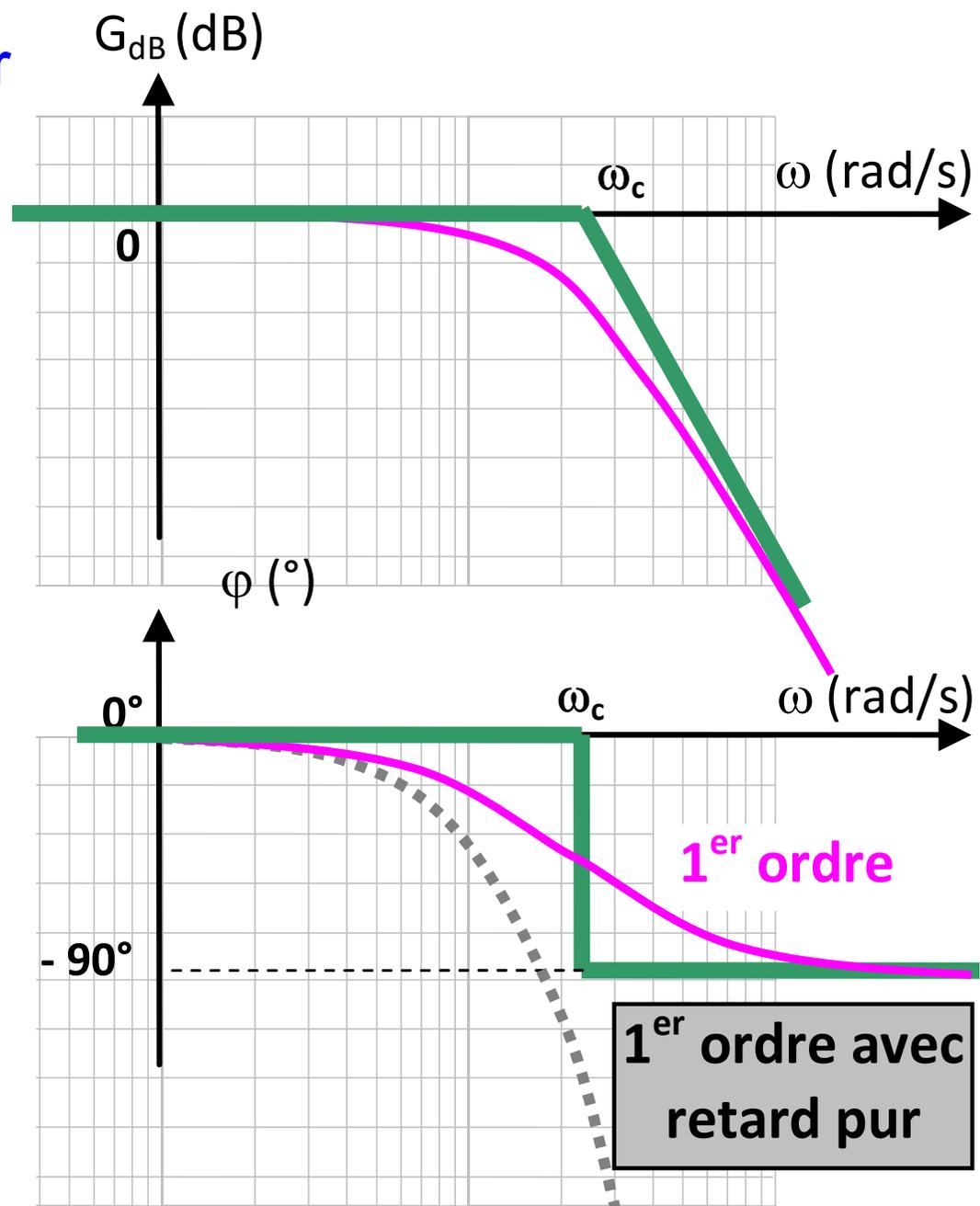
4.1. Le gain de boucle





4. Causes d'instabilité

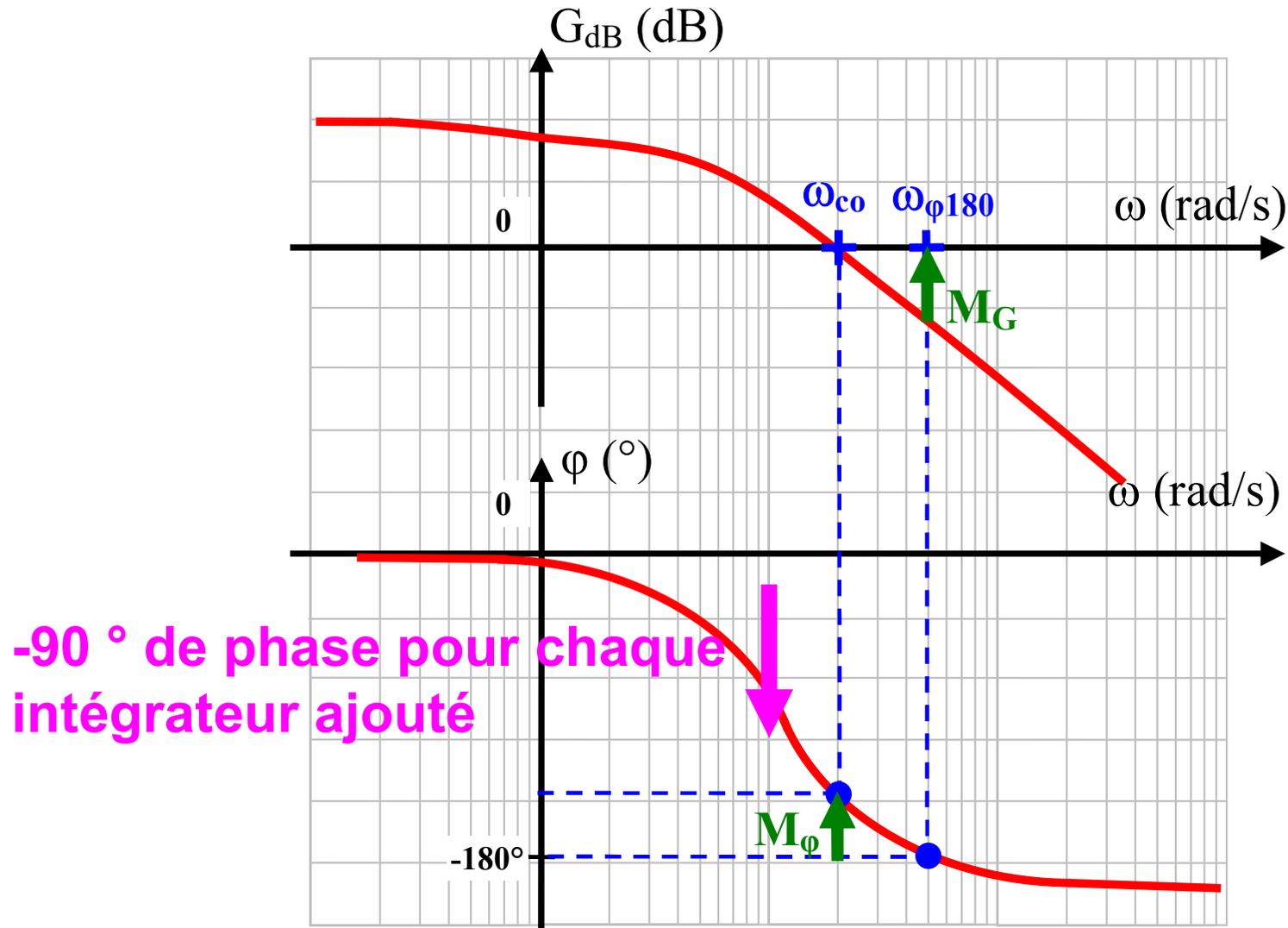
4.2. Retard pur

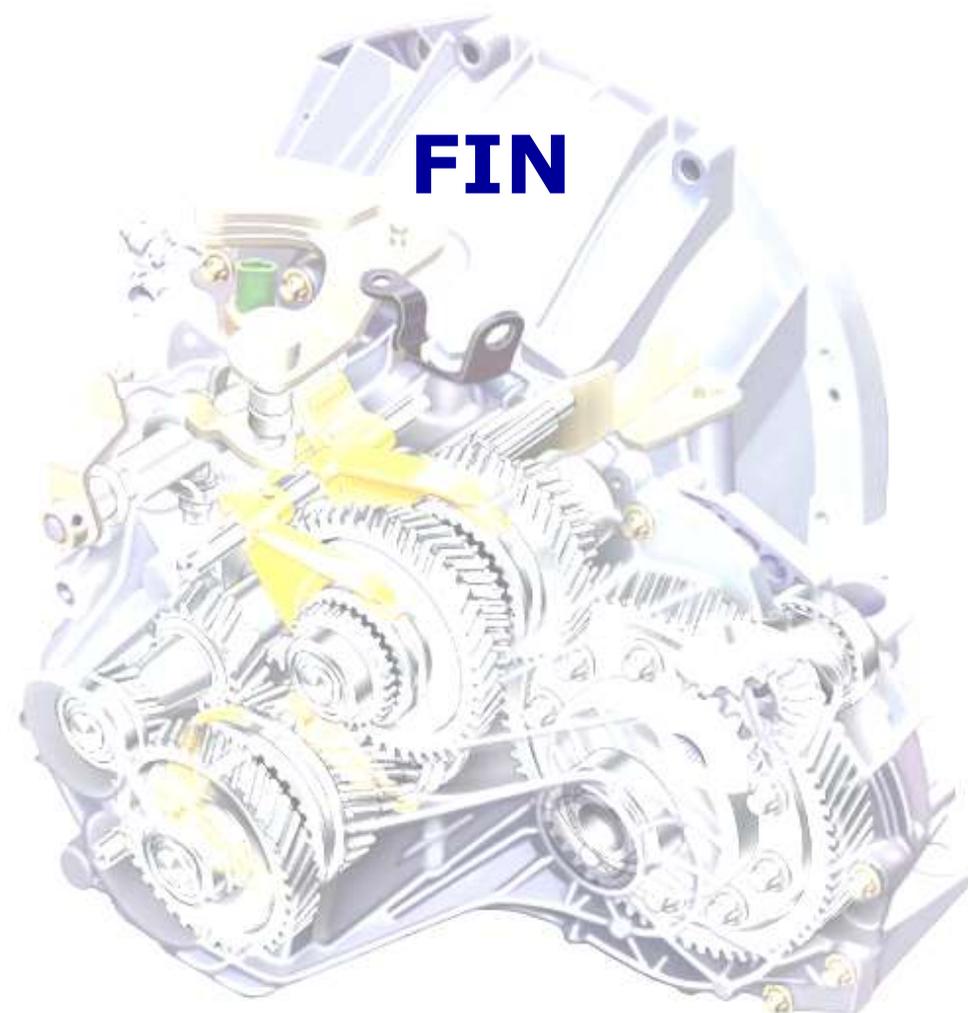


4. Causes d'instabilité



4.3. Intégrateurs





2. Etude de la stabilité à partir de l'analyse de la FTBF



SII - F. MATHURIN

Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF

