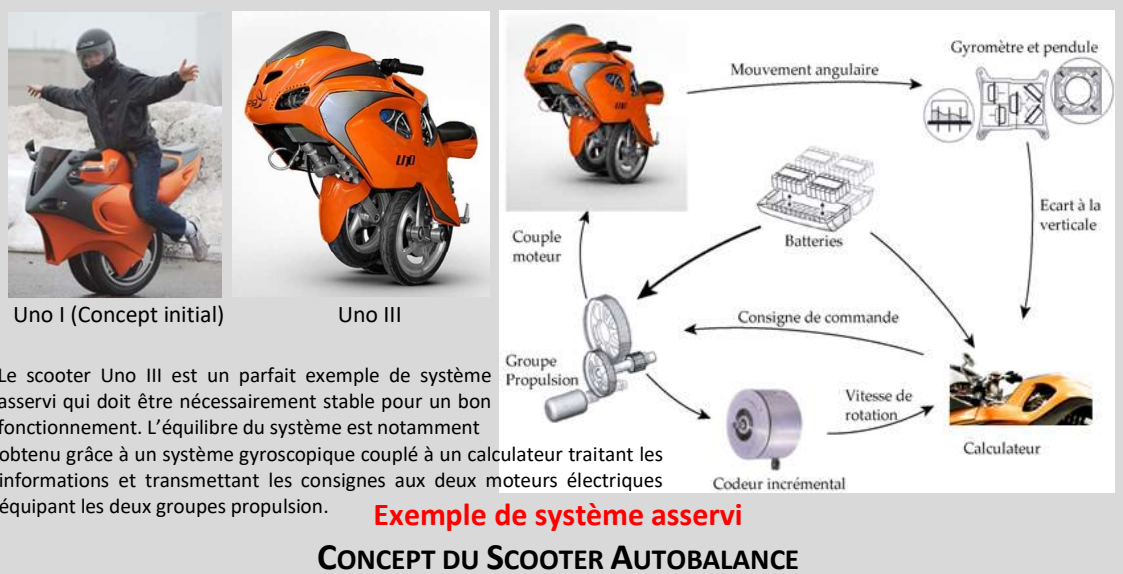


Précision des SLCI

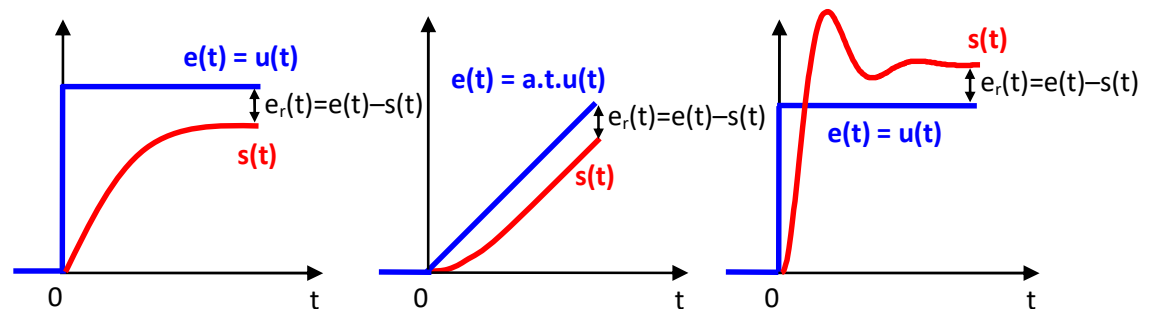


On évalue les performances d'un système asservi, modélisé en SLCI, suivant 4 critères principaux qui sont la **stabilité**, la **précision**, la **rapidité** et l'**amortissement**. Si le système asservi est stable on peut évaluer la rapidité et la précision de celui-ci. L'objectif de ce cours est de présenter les éléments intervenant sur la précision des systèmes ainsi que les outils permettant de l'évaluer indépendamment des autres critères.

1 - DEFINITIONS - PRECISION, ERREUR ET ECART

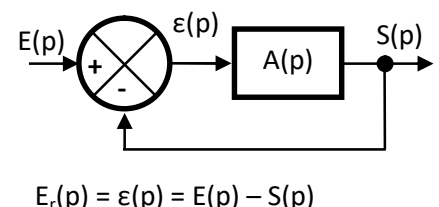


L'erreur $e_r(t)$ est définie par la différence entre la consigne visée en entrée $e(t)$ et la valeur de sortie réelle $s(t)$. Cette définition de l'erreur n'a de sens que si la grandeur de sortie $s(t)$ et l'entrée $e(t)$ sont de même nature. C'est toujours le cas pour un schéma à retour unitaire.



1.1. Ecart et erreur - cas du système bouclé à retour unitaire

Dans le cas d'un système bouclé l'écart $\varepsilon(t)$ en sortie de comparateur correspond à la différence entre l'entrée et la sortie soit $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ ou $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)$ dans le domaine de Laplace. L'erreur $e_r(t)$ et l'écart $\varepsilon(t)$ sont les donc mêmes et s'expriment dans la même unité que la grandeur de sortie.



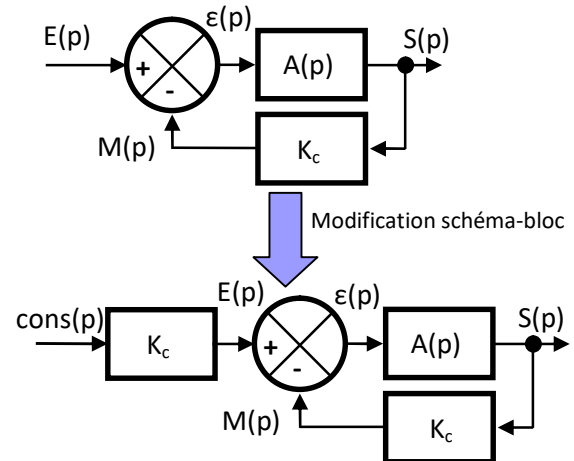
1.2. Ecart et erreur - cas du système bouclé à retour non unitaire

Si le système n'est pas à retour unitaire, il faut modifier le schéma bloc de telle sorte que l'on puisse faire apparaître une consigne $\text{cons}(t)$ de même nature que la sortie $s(t)$.

L'erreur $e_r(t)$ correspond alors à la différence entre $\text{cons}(t)$ et $s(t)$: $e_r(t) = \text{cons}(t) - s(t)$ ou $E_r(p) = \text{Cons}(p) - S(p)$ dans le domaine de Laplace.

L'écart correspond ici à la différence entre $e(t)$ et $m(t)$ soit $\varepsilon(t) = e(t) - m(t)$ ou $\varepsilon(p) = E(p) - M(p)$ dans le domaine de Laplace soit :

$$\begin{aligned}\varepsilon(p) &= E(p) - M(p) = K_c \cdot \text{Cons}(p) - K_c \cdot S(p) \\ &= K_c \cdot (\text{Cons}(p) - S(p)) = K_c \cdot E_r(p)\end{aligned}$$



On constate donc que dans le cas d'un système bouclé à retour non unitaire les valeurs de l'erreur $e_r(t)$ et de l'écart $\varepsilon(t)$ ne sont pas égales. Toutefois ils sont proportionnels et les considérations qualitatives sur l'évolution de l'erreur peuvent être obtenues par analyse de l'écart.

On utilise donc dans ce cas l'erreur relative : $e_{r\%}(t) = \frac{\text{cons}(t) - s(t)}{\text{cons}(t)} = \frac{e(t) - s(t)}{e(t)} = \varepsilon_{r\%}(t)$

1.3. Erreur dynamique et erreur en régime permanent

L'erreur dynamique correspond à l'évolution temporelle de $e_r(t)$.

L'erreur en régime permanent est la limite de $e_r(t)$ lorsque t tend vers l'infini : $e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t)$ soit

en utilisant le théorème de la valeur finale : $e_r = \lim_{t \rightarrow \infty} e_r(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E_r(p)$.

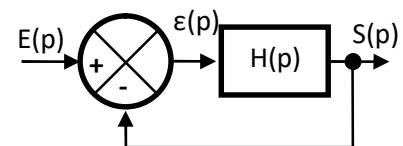
Seule l'erreur en régime permanent est au programme de CPGE !

L'objectif pour obtenir un système précis est d'annuler l'erreur en régime permanent ce qui amène à traiter deux types de problèmes :

- l'entrée varie au cours du temps : minimiser l'erreur e_r lorsque l'entrée du système varie c'est résoudre un problème de poursuite.
- le système subit des perturbations : minimiser l'erreur e_r malgré l'existence de ces perturbations c'est résoudre un problème de régulation.

2 - DETERMINATION DE LA PRECISION⁽¹⁾ EN PROBLEME DE POURSUITE

Pour déterminer la précision pour ce type de problème, on se place dans le cas d'un système bouclé avec un retour unitaire⁽²⁾. L'erreur $e_r(t)$ et l'écart $\varepsilon(t)$ sont les donc mêmes.



Pour se placer dans le cas général on utilise une fonction de transfert $H(p)$ (qui correspond à la

$$\text{FTBO du système}) \text{ du type } H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot (1 + b_1 \cdot p + \dots + b_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + a_1 \cdot p + \dots + a_n \cdot p^{n-\alpha})} = \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)} \text{ (avec } \alpha : \text{classe du}$$

système, n : ordre du système, K : gain statique et $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{N(p)}{D(p)} = 1$).

L'écart $\varepsilon(p)$ s'exprime : $\varepsilon(p) = E(p) - S(p) = E(p) - H(p) \cdot \varepsilon(p) \rightarrow \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p)} = \frac{E(p)}{1 + \text{FTBO}}$

L'erreur statique se calcule en utilisant le théorème de la valeur finale :



⁽¹⁾ en régime permanent !!

⁽²⁾ on peut toujours manipuler et modifier un schéma bloc pour se retrouver dans cette configuration.



$$e_r = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \varepsilon(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) \cdot \frac{1}{1 + H(p)} \rightarrow e_r = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E(p) \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}}$$

2.1. Erreur de position ou erreur statique

L'entrée est un échelon $e(t) = a \cdot u(t) \rightarrow E(p) = \frac{a}{p} \rightarrow e_r = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{a}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \rightarrow e_r \cong \frac{a}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$

- Pour un système de classe 0 ($\alpha = 0$) $\rightarrow e_r = \frac{a}{1 + K}$
- Pour un système de classe 1 ou >1 ($\alpha \geq 1$) $\rightarrow e_r = 0$

2.2. Erreur de traînage ou erreur de vitesse

L'entrée est une rampe $e(t) = a \cdot t \cdot u(t) \rightarrow E(p) = \frac{a}{p^2} \rightarrow e_r = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{a}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \rightarrow e_r \cong \frac{a}{p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$

- Pour un système de classe 0 ($\alpha = 0$) $\rightarrow e_r = +\infty$
- Pour un système de classe 1 ($\alpha = 1$) $\rightarrow e_r = \frac{a}{K}$
- Pour un système de classe 2 ($\alpha = 2$) $\rightarrow e_r = 0$

2.3. Erreur en accélération

L'entrée est une parabole $e(t) = a \cdot \frac{t^2}{2} \cdot u(t) \rightarrow E(p) = \frac{a}{p^3} \rightarrow e_r = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{a}{p^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}} \rightarrow e_r \cong \frac{a}{p^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{p^\alpha}}$

- Pour un système de classe 0 ($\alpha = 0$) $\rightarrow e_r = +\infty$
- Pour un système de classe 1 ($\alpha = 1$) $\rightarrow e_r = +\infty$
- Pour un système de classe 2 ($\alpha = 2$) $\rightarrow e_r = \frac{a}{K}$

2.4. Bilan sur la précision en régime permanent en problème de poursuite

	FTBO de classe 0 ($\alpha = 0$)	FTBO de classe 1 ($\alpha = 1$)	FTBO de classe 2 ($\alpha = 2$)
Forme de la FTBO	$H(p) = K \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$	$H(p) = \frac{K}{p} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$	$H(p) = \frac{K}{p^2} \cdot \frac{N(p)}{D(p)}$
Erreur de position ou erreur statique	$e_r = \frac{a}{1 + K}$	$e_r = 0$	$e_r = 0$
Erreur de traînage ou erreur de vitesse	$e_r = +\infty$	$e_r = \frac{a}{K}$	$e_r = 0$
Erreur en accélération	$e_r = +\infty$	$e_r = +\infty$	$e_r = \frac{a}{K}$
Commentaires	0 intégration : système peu précis mais stable	1 intégration : précision acceptable et stabilité moyenne	2 intégrations : système très précis mais instable – délicat à stabiliser



Au concours les résultats synthétisés dans le tableau précédent peuvent être utilisés sans démonstration. Il est donc utile de connaître par cœur ce tableau.

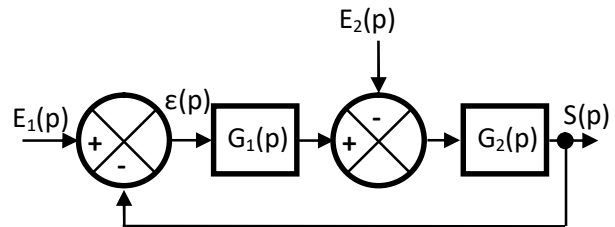


⁽³⁾ en régime permanent

- Plus le nombre d'intégrateur est grand, plus la classe du système est importante et plus la précision est bonne. Si l'erreur n'est pas nulle il est possible d'ajouter à l'aide d'un correcteur un (ou plusieurs) intégrateur(s) dans l'asservissement (correcteur proportionnel intégral).
- Si l'erreur n'est ni infinie ni nulle, l'erreur sera d'autant plus petite que le gain statique K de la FTBO sera grand. Il est donc possible d'ajouter dans le système un gain pour minimiser l'erreur (correcteur proportionnel).

3 - DETERMINATION DE LA PRECISION⁽³⁾ EN PROBLEME DE REGULATION

Pour déterminer la précision pour ce type de problème, on se place dans le cas d'un système bouclé avec un retour unitaire avec une perturbation placée après la fonction $G_1(p)$. L'erreur $e_r(t)$ et l'écart $\varepsilon(t)$ sont les donc mêmes.



La superposition permet d'obtenir la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$S(p) = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_1(p) - \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_2(p)$$

Pour se placer dans le cas général on utilise des fonctions de transfert $G_1(p)$ et $G_2(p)$ écrites sous forme canonique : $G_1(p) = \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)}$ et $G_2(p) = \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \cdot \frac{N_2(p)}{D_2(p)}$ où $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{N_i(p)}{D_i(p)} = 1$ et $\alpha_i \geq 0$.

$$\text{L'écart } \varepsilon(p) \text{ s'exprime : } \varepsilon(p) = E_1(p) - S(p) = E_1(p) - \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_1(p) + \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_2(p)$$

$$\text{Soit : } \varepsilon(p) = \frac{1}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_1(p) + \frac{G_2(p)}{1 + G_1(p) \cdot G_2(p)} \cdot E_2(p)$$

Le terme de l'erreur qui dépend de $E_1(p)$ correspond à l'erreur en poursuite et est étudiée paragraphe précédent. Le terme de l'erreur qui dépend de $E_2(p)$ correspond à l'erreur en régulation. On utilise le théorème de superposition qui permet d'étudier les 2 erreurs séparément qui seront ensuite sommées (dans le domaine temporel).

L'erreur en régulation se calcule en utilisant le théorème de la valeur finale avec $E_1(p) = 0$:

$$e_{r(\text{regulation})} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E_2(p) \cdot \frac{\frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \cdot \frac{N_2(p)}{D_2(p)}}{1 + \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \cdot \frac{N_1(p)}{D_1(p)} \cdot \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \cdot \frac{N_2(p)}{D_2(p)}} \rightarrow e_{r(\text{regulation})} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot E_2(p) \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2}$$

Si on considère que la fonction de transfert de la perturbation est du type $E_2(p) = \frac{a}{p^q}$

$$\text{alors } e_{r(\text{regulation})} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{a}{p^{q-1}} \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{p^{\alpha_1 + \alpha_2} + K_1 \cdot K_2}$$

3.1. Cas où $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$

Pour $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, l'erreur en régulation est équivalente à $e_{r(\text{regulation})} \cong \frac{a}{p^{q-1}} \cdot \frac{K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$:

- Si $q = 1 \rightarrow E_2(p) = \frac{a}{p}$ (entrée échelon) $\rightarrow e_{r(\text{regulation})} = \frac{a \cdot K_2}{1 + K_1 \cdot K_2}$

- Si $q > 1 \rightarrow e_{r(\text{regulation})} = +\infty$

3.2. Cas où $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$

Pour $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $p^{\alpha_1 + \alpha_2}$ est négligeable devant $K_1 \cdot K_2 \rightarrow e_{r(\text{regulation})} \cong \frac{a}{p^{q-1}} \cdot \frac{K_2 \cdot p^{\alpha_1}}{K_1 \cdot K_2} = \frac{a}{K_1} \cdot p^{\alpha_1 + 1 - q}$

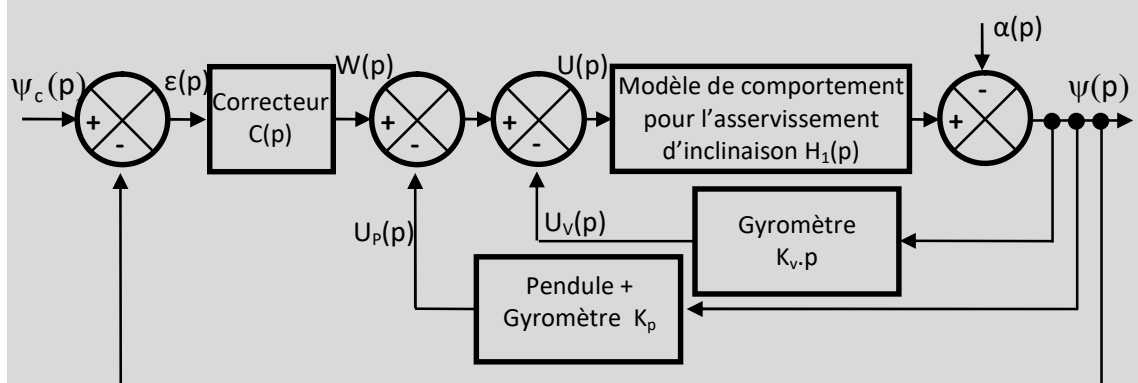
(une éventuelle intégration après la perturbation n'a pas d'influence sur la précision vis-à-vis de la perturbation) :

- Si $\alpha_1 > q - 1$ (le nombre d'intégrateur avant la perturbation est supérieur ou égal à la classe de la perturbation) alors l'erreur est nulle : $e_{r(\text{regulation})} = 0$.
- Si $\alpha_1 = q - 1$ alors l'erreur statique est non nulle et vaut $e_{r(\text{regulation})} = \frac{a}{K_1}$
- Si $\alpha_1 < q - 1$ (le nombre d'intégrateur avant la perturbation est inférieur à la classe de la perturbation) alors l'erreur est infinie : $e_{r(\text{regulation})} = +\infty$.

Au concours la perturbation modélisée est souvent modélisée par un échelon, par conséquent :

- **s'il n'y a pas d'intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation, la perturbation provoque une erreur en régulation constante et on augmente le gain en amont de la perturbation pour réduire cette erreur ;**
- **s'il y a un intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation, l'erreur en régulation est nulle.**

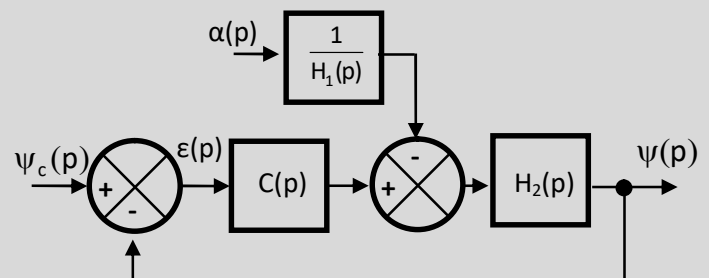
Application sur la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter en mode auto-balançé :



Avec : $C(p) = K_c$; $H_2(p) = \frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} \cdot p^2 + \frac{2 \cdot z_2}{\omega_2} \cdot p + 1}$; $H_1(p) = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1}$ et $\alpha(p) = \frac{\alpha_0}{p}$ (échelon).

La régulation d'inclinaison du scooter consiste à maintenir l'inclinaison $\psi(t)$ en régime permanent quelque soit l'inclinaison du conducteur $\alpha(t) \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = 0$.

Dans ces conditions l'erreur en régulation $e_{r(\text{regulation})}$ en régime permanent doit être nulle quelque soit la perturbation $\alpha(t)$. Pour calculer cette erreur en régulation il faut modifier dans un premier temps le schéma bloc du système. L'erreur en régulation se calcule pour $\psi_c(t) = 0$.



En appliquant le théorème de superposition la sortie s'écrit :

$$\psi(p) = \frac{C(p).H_2(p)}{1 + C(p).H_2(p)} \psi_c(p) - \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_2(p)}{1 + C(p).H_2(p)} \alpha(p) = - \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_2(p)}{1 + C(p).H_2(p)} \alpha(p) \quad \text{pour } \psi_c(p) \text{ nul}$$

L'écart $\varepsilon(p)$ s'exprime alors : $\varepsilon(p) = \psi_c(p) - \psi(p) = \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_2(p)}{1 + C(p).H_2(p)} \alpha(p)$ et l'erreur en

$$\text{régulation : } e_{r(\text{regulation})} = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \alpha(p) \cdot \frac{1}{H_1(p)} \cdot \frac{H_2(p)}{1 + C(p).H_2(p)}.$$

$$\text{Soit : } e_{r(\text{regulation})} = \lim_{p \rightarrow 0} \alpha_0 \cdot \frac{1}{\frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} p^2 - 1}} \cdot \frac{\frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} p^2 + \frac{2.z_2}{\omega_2} p + 1}}{1 + K_c \cdot \frac{K_2}{\frac{1}{\omega_2^2} p^2 + \frac{2.z_2}{\omega_2} p + 1}} = \frac{-K_2 \cdot \alpha_0}{K_1 \cdot (1 + K_c \cdot K_2)} \neq 0$$

L'erreur en régulation est non nulle. Ce résultat était prévisible puisqu'il n'y a pas d'intégration en amont de la perturbation. Pour annuler cette erreur en régulation pour une perturbation modélisée par un échelon, il faut modifier le correcteur $C(p)$ en utilisant un correcteur intégral (de classe 1) plutôt qu'un correcteur proportionnel.

4 - CONCLUSION

Dans tous les cas de figure, on voit qu'il faut des intégrateurs dans la boucle pour annuler l'erreur $\varepsilon(t)$. Si le système à commander n'en possède pas (ou pas assez), on peut les apporter avec un correcteur. Cela semble donc facile d'obtenir un système bouclé précis. Cependant, il ne faut pas perdre de vue qu'il faut aussi et surtout que le système bouclé soit stable. Or l'effet d'un intégrateur sur la phase de la FTBO sera d'apporter -90° quelle que soit la valeur de ω . On peut se douter que perdre 90° aura forcément un effet négatif sur la marge de phase $M\phi$ (qui pourra même devenir négative) et donc perdre sur la stabilité.

La démonstration précédente permet de mettre le doigt sur un dilemme que l'automaticien a toujours à l'esprit : il faudra toujours trouver **un compromis entre la stabilité** (ou plutôt les marges de stabilité) **et la précision**.