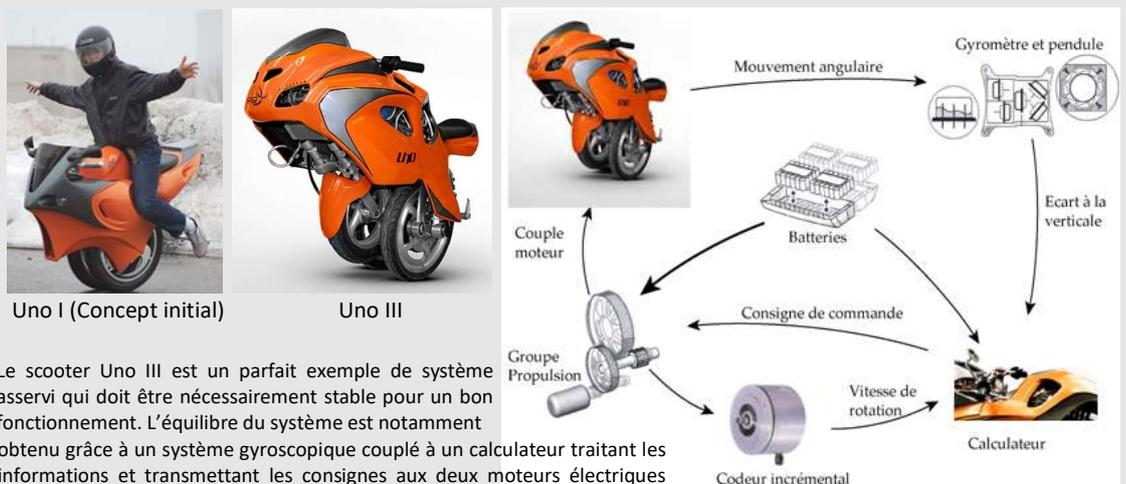


# Stabilité des SLCI



Le scooter Uno III est un parfait exemple de système asservi qui doit être nécessairement stable pour un bon fonctionnement. L'équilibre du système est notamment obtenu grâce à un système gyroskopique couplé à un calculateur traitant les informations et transmettant les consignes aux deux moteurs électriques équipant les deux groupes propulsion.

## Exemple de système asservi

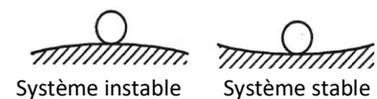
### CONCEPT DU SCOOTER AUTOBALANCE

On évalue les performances d'un système asservi, modélisé en SLCI, suivant 4 critères principaux qui sont la **stabilité**, la **précision**, la **rapidité** et l'**amortissement**. La stabilité est une notion générale non spécifique des systèmes asservis mais elle prend cependant une grande importance dans le cas de ces systèmes car on souhaite toujours qu'un système asservi soit stable. La stabilité est donc le critère que l'on regarde en premier et il est inutile d'analyser les autres critères si le système n'est pas stable.

## 1 - DEFINITIONS

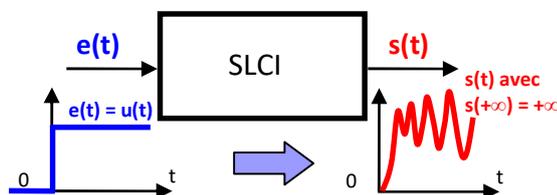
### 1.1. Stabilité – Définition générale

On dit qu'un système est stable si, écarté de sa position par une cause extérieure, il revient vers cette position lorsque la cause disparaît.

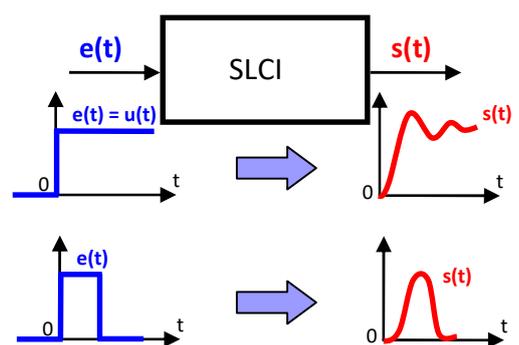


### 1.2. Stabilité – Définition adaptée aux SLCI

Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée.



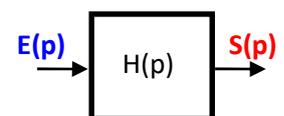
Réponse s(t) d'un système instable



Réponses s(t) d'un système stable

### 1.3. Condition fondamentale de stabilité d'un SLCI

La stabilité d'un SLCI peut être déterminée uniquement à partir des pôles de sa fonction de transfert H(p).



Dans ce cas la fonction de transfert s'écrit 
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{N(p)}{(p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_i) \cdot \dots \cdot (p-p_n)}$$



Avec N(p) :  
numérateur de H(p),  
p<sub>i</sub> : pôles de H(p) et n  
: ordre de H(p).

Si l'on sollicite ce système avec une **impulsion de Dirac** en entrée ( $E(p) = 1$ ), la sortie  $S(p)$  a pour expression dans le domaine de Laplace :  $S(p) = \frac{N(p)}{(p-p_1) \cdot (p-p_2) \cdot \dots \cdot (p-p_i) \cdot \dots \cdot (p-p_n)}$ .

Ce qui donne  $S(p) = \frac{A_1}{(p-p_1)} + \frac{A_2}{(p-p_2)} + \dots + \frac{A_i}{(p-p_i)} + \dots + \frac{A_n}{(p-p_n)}$  après décomposition en éléments simples.

La transformation inverse permet ensuite d'obtenir la réponse temporelle qui a donc pour expression :  $s(t) = A_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p_2 \cdot t} + \dots + A_i \cdot e^{p_i \cdot t} + \dots + A_n \cdot e^{p_n \cdot t}$

Pour que la sortie soit bornée, les exponentielles doivent toutes être décroissantes, ce qui donne 2 cas :

- Si les pôles sont tous réels :  $s(t)$  ne tend vers 0 que si les  $p_i$  sont tous négatifs.
- S'il y a des pôles complexes conjugués deux à deux ( $\rightarrow p_1 = \alpha + j \cdot \omega$  et  $p_2 = \alpha - j \cdot \omega \rightarrow s(t) = A_1 \cdot e^{(\alpha + j \cdot \omega) \cdot t} + A_2 \cdot e^{(\alpha - j \cdot \omega) \cdot t} = \mu \cdot e^{\alpha t} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$ ) :  $s(t)$  tend vers 0 si  $\alpha < 0$ .

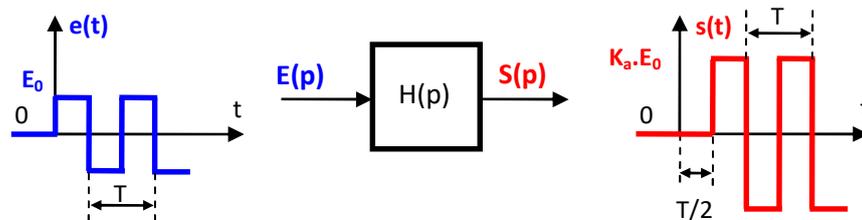


**Un Système Linéaire Continu Invariant est stable ssi sa fonction de transfert possède :**

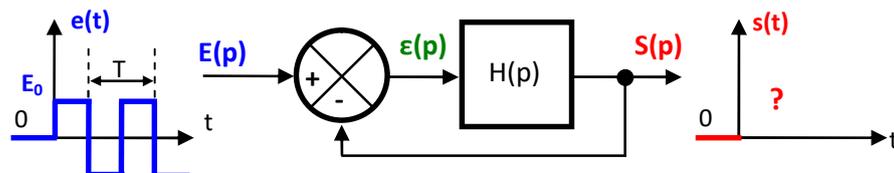
- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.

#### 1.4. Instabilité d'un système après bouclage

Lorsque l'on boucle un SLCI pour l'asservir, l'utilisation de cette boucle peut déstabiliser le système. Pour illustrer le phénomène on peut comparer la réponse d'un même système, de fonction de transfert  $H(p)$ , dans le cas où il est non bouclé puis dans le cas où il est bouclé. Pour cela on le sollicite avec un même signal d'entrée  $e(t)$  rectangulaire de période  $T$  et d'amplitude  $E_0$ . On considère que le système étudié (bloc  $H(p)$ ) entraîne un déphasage de  $T/2$  du signal et l'amplifie d'une valeur  $K_a$  :



En boucle ouverte on constate que le système est stable, le signal de sortie est juste amplifié et déphasé par rapport au signal d'entrée. Si on boucle ce même système avec un retour unitaire et qu'il est soumis à la même entrée en créneau,  $H(p)$  est maintenant soumis à une entrée  $\epsilon(p) = S(p) - E(p)$  qui correspond à la différence entre les deux signaux d'entrée et de sortie.



Pour déterminer le signal de sortie  $s(t)$ , il faut cette fois-ci déterminer l'écart  $\epsilon(t)$  qui entre dans le bloc,  $\frac{1}{2}$  période par  $\frac{1}{2}$  période. Le tracé obtenu montre le phénomène de « pompage » ou instabilité dans laquelle la grandeur amplifiée  $s(t)$  s'ajoute au signal d'entrée qui est lui-même de nouveau amplifié. Le processus se reproduit de période en période et le signal de sortie diverge donc très rapidement...

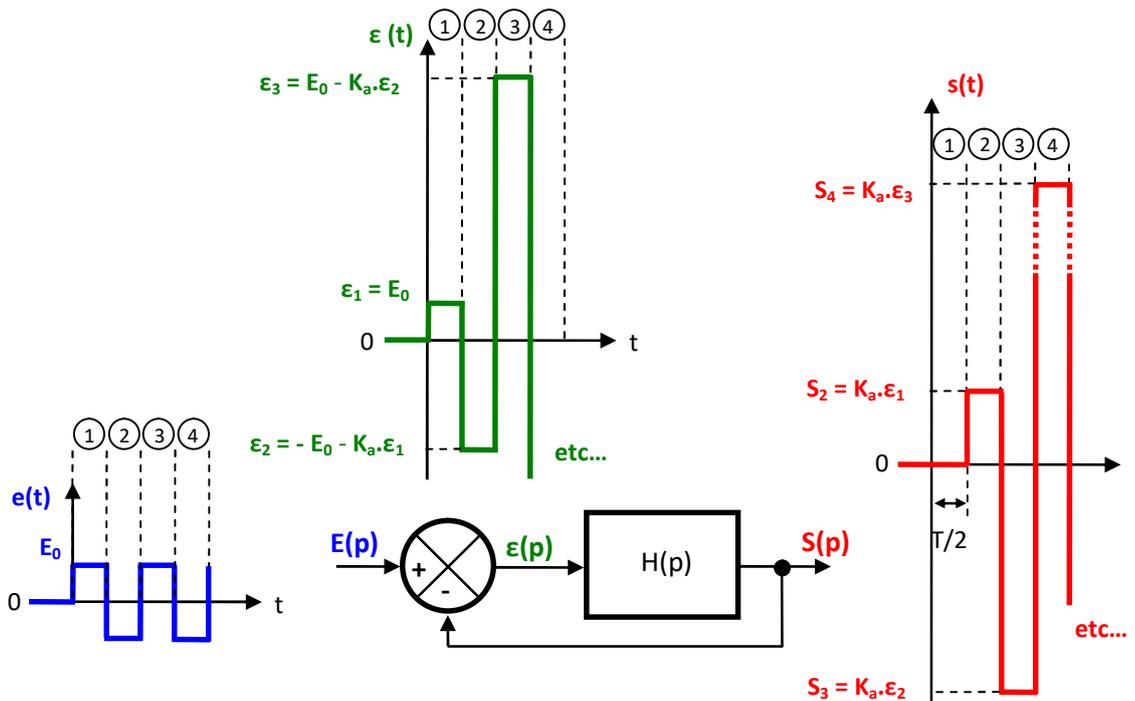
On a :

Pour la phase 1 :  
l'écart  $\epsilon_1 = E_0$ .

Pour la phase 2 :  
l'écart  $\epsilon_2 = E_2 - S_2 = -E_0 - K_a \cdot \epsilon_1 = -E_0 \cdot (1 + K_a)$ .

Pour la phase 3 :  
l'écart  $\epsilon_3 = E_3 - S_3 = E_0 - K_a \cdot \epsilon_2 = E_0 - K_a \cdot (-E_0 \cdot (1 + K_a)) = E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)$ .

Pour la phase 4 :  
l'écart  $\epsilon_4 = E_4 - S_4 = E_0 - K_a \cdot \epsilon_3 = -E_0 - K_a \cdot (E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2)) = -E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3)$ , etc...



Dans ce cas l'écart tend en valeur absolue vers  $E_0 \cdot (1 + K_a + K_a^2 + K_a^3 + \dots + K_a^n)$ . C'est une suite qui converge ou diverge suivant les valeurs de  $K_a$ . Par conséquent si  $K_a \geq 1$ , la suite tend vers  $+\infty$  et le signal de sortie également. Il y a donc instabilité après bouclage si  $K_a \geq 1$ .

L'existence de la boucle de retour impose donc d'étudier la stabilité des systèmes asservis :

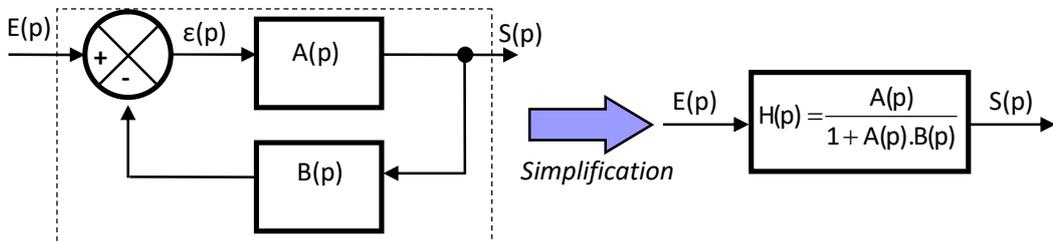
- Soit à partir de **critères analytiques sur le polynôme caractéristique de la fonction de transfert boucle fermée (FTBF)** du système, ce qui nécessite d'avoir le modèle numérique de cette FTBF.
- Soit à partir de **critères graphiques sur les lieux de transfert de la fonction de transfert boucle ouverte (FTBO)** du système. **Dans la pratique, les critères graphiques sont plutôt privilégiés par les ingénieurs car ils permettent de déterminer des marges de stabilité.**



## 2 - ETUDE DE LA STABILITE A PARTIR DE L'ANALYSE DE LA FTBF

### 2.1. Etude de la stabilité à partir des pôles de la FTBF

Le calcul de la fonction de transfert boucle fermée d'un système asservi permet de passer d'un modèle bouclé à un modèle équivalent non bouclé de fonction de transfert  $H(p)$ .



La FTBF pouvant aussi se mettre sous la forme privilégiant l'écriture en pôles, il est par conséquent possible de déterminer la stabilité d'un système asservi à l'aide de la condition fondamentale.

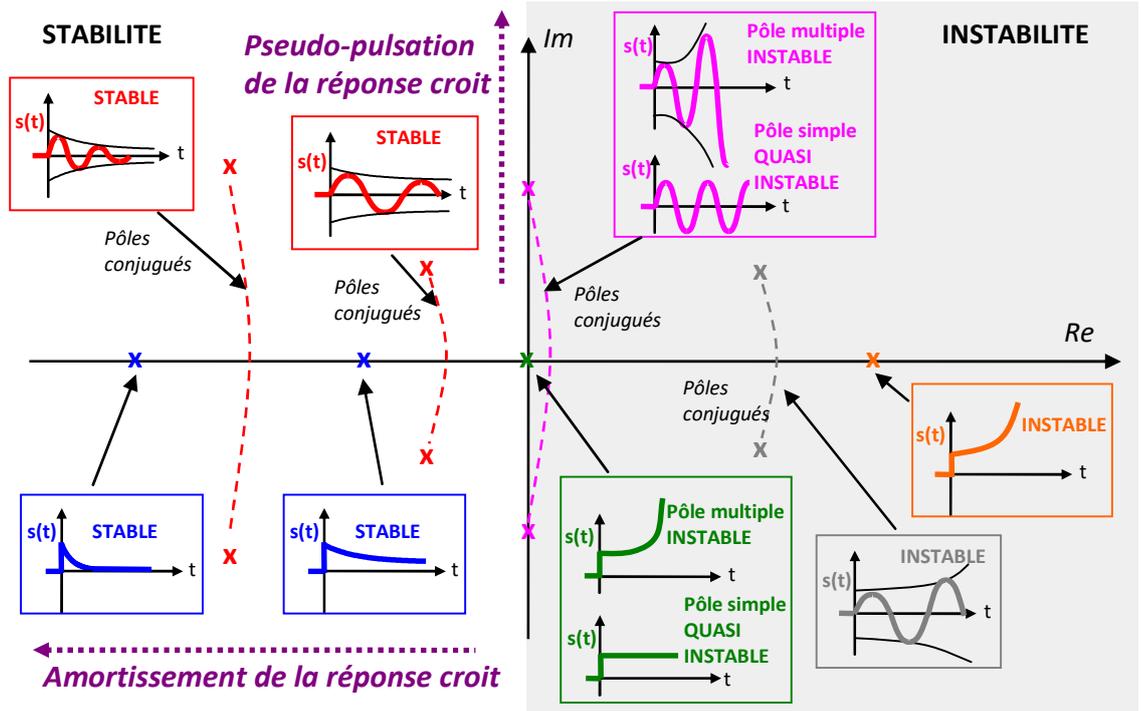
**Un système asservi est stable si sa FTBF possède :**

- des pôles réels tous négatifs,
- des pôles complexes ayant leur partie réelle négative.



On peut représenter graphiquement les pôles et les zéros d'une fonction de transfert dans un plan complexe. On représente usuellement un pôle par une croix (x) et un zéro par un rond (o). Cet ensemble est appelé carte des pôles et des zéros.

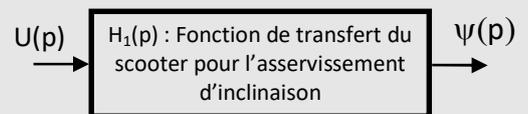
**Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système**



Bien que sa réponse à l'impulsion soit stable, un **intégrateur pur** est tout de même considéré comme un système **instable** puisqu'une entrée en échelon conduit à une sortie en rampe.

*Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter en mode auto-balancé :*

La chaîne d'action permettant de réguler l'inclinaison du scooter est réalisée par un ensemble amplificateur et motoréducteur. Cet ensemble délivre un couple moteur qui permet d'incliner le châssis par rapport à la verticale.



Le modèle de connaissance de ce système (amplificateur + motoréducteur + modèle dynamique du châssis ≈ pendule inverse) donne une fonction de transfert qui peut s'écrire sous la forme :

$$H_1(p) = \frac{\Psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1}$$

Avec :  $U(p)$  transformée de Laplace de la tension de commande du motoréducteur,  $\Psi(p)$  transformée de Laplace de l'angle d'inclinaison du scooter par rapport à la verticale,  $K_1$  gain du système mécanique ( $K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$ ) et  $\omega_1$  pulsation propre du système mécanique ( $\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$ ).

L'écriture en pôles donne :  $H_1(p) = \frac{\Psi(p)}{U(p)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{p^2 - \omega_1^2} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - \omega_1) \cdot (p + \omega_1)} = \frac{K_1 \cdot \omega_1^2}{(p - 4,1) \cdot (p + 4,1)}$

$H_1(p)$  possède 2 pôles réels dont un est positif → le modèle dynamique du scooter sans asservissement est donc instable<sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> ce résultat était bien évidemment prévisible puisque le centre de gravité du scooter est au dessus de l'axe de rotation des roues (pendule inverse !).

**2.2. Etude de la stabilité à partir de critères algébriques sur la FTBF (hors programme !)**

Lorsque le dénominateur  $D(p)$  de la FTBF  $H(p)$  n'est pas sous une forme factorisée permettant d'identifier les pôles, il est possible d'utiliser des critères algébriques. La FTBF s'écrit alors :

$H(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$  où  $D(p) = 1 + \text{FTBO}$ , appelé polynôme caractéristique de la FTBF, se présente sous la

forme  $D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + \dots + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + a_n \cdot p^n$ .



Le critère algébrique de Routh est normalement hors programme. Cependant on peut retrouver dans certains sujets X-ENS l'étude de la stabilité à l'aide de ce critère mais limité aux équations caractéristiques du 3<sup>ème</sup> ordre ( $D(p) = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3$ ).



**Le critère de Routh permet uniquement de déterminer le gain d'un système pour qu'il soit stable mais ne renseigne pas sur la marge de stabilité d'un système.**

(2) Pour les polynômes caractéristiques de degré 1 et 2, le premier examen est suffisant pour déterminer si le système est stable ou non.

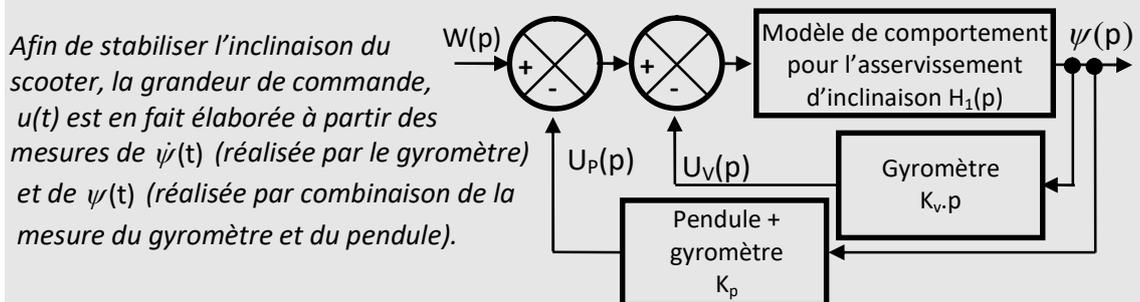
**Critère de Routh pour une équations caractéristiques du 3<sup>ème</sup> ordre**

L'application du critère algébrique de Routh se fait en 2 étapes :

- Premier examen<sup>(2)</sup> : **Si certains  $a_i$  sont négatifs ou nuls,  $D(p)$  a des racines à partie réelle positive et le système est donc instable.**
- Deuxième examen<sup>(3)</sup> : **Si tous les  $a_i$  sont strictement positifs, on ne peut pas affirmer que les  $p_i$  sont à partie réelle négative. Pour que le système soit stable il faut vérifier que  $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$ .**

(3) Pour ce 2<sup>ème</sup> examen, il faut normalement construire un tableau nommé tableau de Routh pour savoir si le système est stable. Pour une équation caractéristique d'ordre 3, la construction du tableau revient à la fin à vérifier que  $a_1 \cdot a_2 > a_0 \cdot a_3$

Exemple de la chaine de régulation de l'inclinaison du scooter en mode auto-balancé :



Pour étudier le comportement du système il faut d'abord déterminer la FTBF du système :

$$H_2(p) = \frac{\psi(p)}{W(p)} = \frac{1}{K_p} \cdot \frac{K_p \cdot H_1(p)}{1 + p \cdot K_v \cdot H_1(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + \frac{K_p \cdot H_1(p)}{1 + p \cdot K_v \cdot H_1(p)}} = \frac{K_1}{\frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 - 1 + K_p \cdot K_1 + p \cdot K_v \cdot K_1}$$

On applique le critère de Routh sur le polynôme caractéristique de la FTBF :

$$D(p) = \frac{1}{\omega_1^2} \cdot p^2 + K_v \cdot K_1 \cdot p + K_p \cdot K_1 - 1.$$

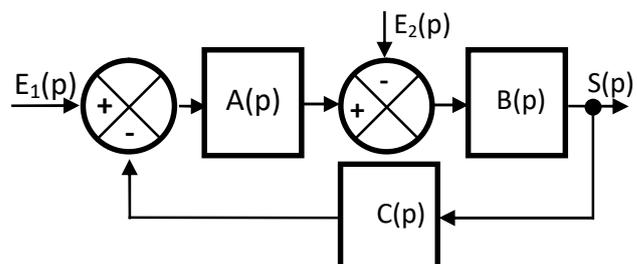
Tous les coefficients du polynôme doivent être de même signe et non nuls →  $\frac{1}{\omega_1^2} = \frac{1}{4,1^2} > 0$  par conséquent  $K_v \cdot K_1 > 0$  et  $K_p \cdot K_1 - 1 > 0$ . Ici le 1<sup>er</sup> examen suffit puisque le polynôme caractéristique est du 2<sup>nd</sup> degré donc finalement pour que le système soit stable il faut  $K_v > 0$  et  $K_p > \frac{1}{K_1}$ .

Les valeurs finalement retenues sur le système sont  $K_v = 2,15 \text{ rad/V}$  et  $K_p = 13,5 \text{ V/rad}$  qui permettent d'avoir le temps de réponse à 5% le plus rapide pour une pulsation propre  $\omega_2 = 6,15 \text{ rad}$  (la pulsation  $\omega_2$  est choisie telle qu'elle soit proche de celle du système mécanique  $\omega_2 = 1,5 \cdot \omega_1 = 6,15 \text{ rad/s}$ ).

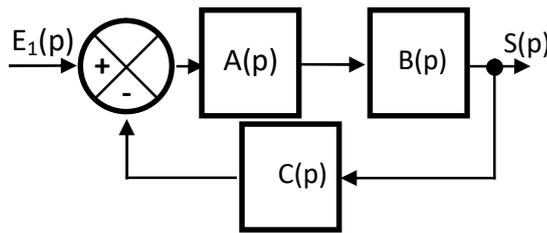
**2.3. Etude de la stabilité des systèmes multi variables**

Dans le cas de systèmes multi-variables, on superpose deux modes :

- un 1<sup>er</sup> mode pour lequel l'entrée  $E_2(p)$  est considérée comme nulle,
- un 2<sup>nd</sup> mode lequel l'entrée  $E_1(p)$  est considérée comme nulle.



- Mode à entrée  $E_2(p)=0$

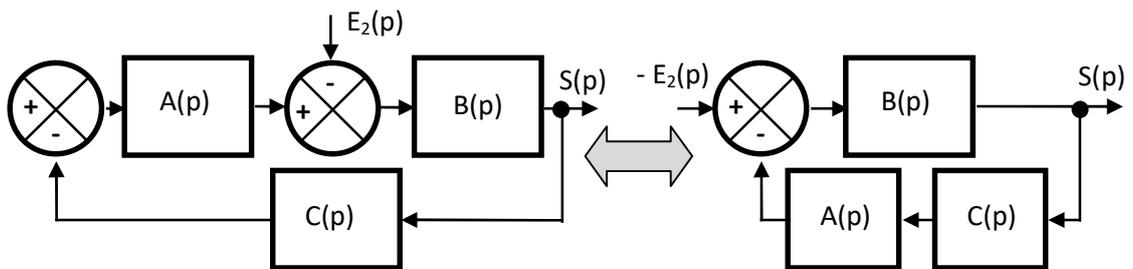


$$H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} = \frac{S(p)}{E_1(p)} \Big|_{E_2(p)=0}$$

$$H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

$H_1(p)$  est la fonction de transfert en poursuite.

- Mode à entrée  $E_1(p)=0$



$$H_2(p) \Big|_{E_1(p)=0} = \frac{S(p)}{-E_2(p)} \Big|_{E_1(p)=0} = \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

$H_2(p)$  est la fonction de transfert en régulation.

La superposition des 2 modes permet d'obtenir enfin la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$S(p) = H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} . E_1(p) - H_2(p) \Big|_{E_1(p)=0} . E_2(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_2(p)$$

On constate alors que le polynôme caractéristique de la FTBF  $D(p)$  est le même pour la fonction de transfert en poursuite  $S(p) / E_1(p)$  et la fonction de transfert en régulation  $S(p) / E_2(p)$ . Les pôles des deux fonctions de transfert sont aussi par conséquent les mêmes. L'étude de stabilité du système comprenant les perturbations est donc la même que celle du système sans perturbation.



<sup>(4)</sup> Le fait que les critères soient fréquentiels ne doit pas conduire à penser que l'instabilité ne peut se produire que si l'entrée est sinusoïdale !!! En effet, tout signal d'entrée (un échelon par exemple) peut être décomposé en série de Fourier et donc être considéré comme un somme de signaux sinusoïdaux couvrant un large spectre de pulsations.

**Pour étudier la stabilité d'un système multi variables, il suffit de ne regarder que la stabilité de la fonction de transfert en poursuite  $S(p) / E_1(p)$ .**

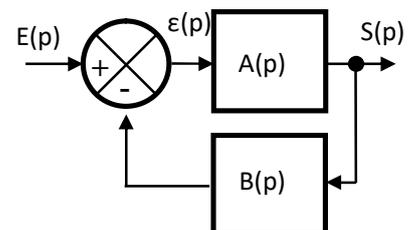
### 3 - ETUDE DE LA STABILITE A PARTIR DE CRITERES GRAPHIQUES SUR LA FTBO

Dans la pratique, l'étude de la stabilité **des systèmes bouclés** se fait plutôt graphiquement dans le **domaine fréquentiel**<sup>(4)</sup> à partir de la **FTBO**.

#### 3.1. Equation caractéristique et point critique – Définitions

On appelle équation caractéristique d'un système bouclé ci-contre l'expression  $1 + FTBO(p) = 0$ . Le système est en limite de stabilité si  $FTBO(p) = -1$ .

On appelle point critique le point du plan complexe d'affixe  $z = -1$  (module 1 et argument  $-180^\circ$ ) et on constate que l'étude du dénominateur des FTBF revient en fait à analyser la FTBO par rapport au point critique.



<sup>(5)</sup> Le critère de Nyquist est assez complexe et hors programme.



Si le lieu de transfert dans le plan de Black de la FTBO passe sur le point critique alors le système est oscillant.



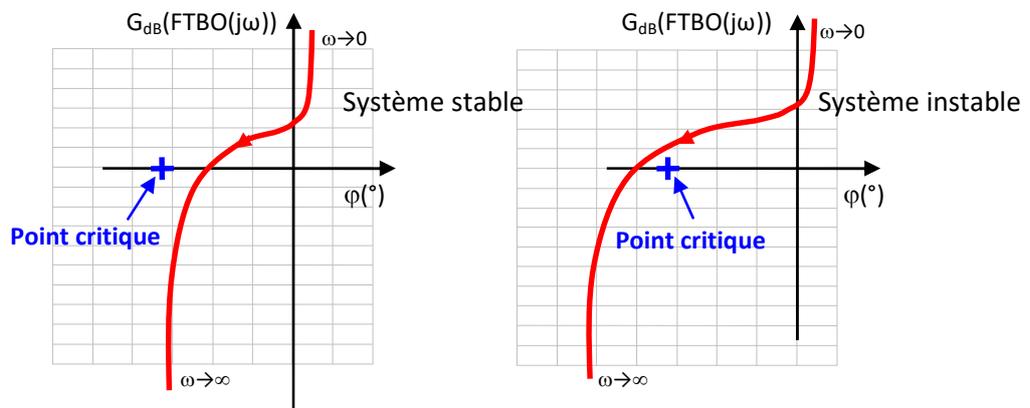
### 3.2. Critère du revers

La stabilité d'un SLCI à partir de sa FTBO est évaluée à l'aide du critère de Nyquist<sup>(5)</sup>. Cependant la plupart des systèmes rencontrés dans l'industrie ont en fait une FTBO dont les pôles sont à parties réelles strictement négative. Cette configuration permet d'utiliser un critère plus simple pour analyser la stabilité d'un SLCI à partir de sa FTBO, il est appelé critère du revers.

**Au concours, seul le critère graphique du revers dans le plan de Bode est au programme. Il n'est valable que si la FTBO ne possède que des pôles à partie réelle strictement négative.**

#### Critère graphique du revers dans le plan de Black (hors programme)

Un système asservi, stable en boucle ouverte, est asymptotiquement stable en boucle fermée si lorsque l'on parcourt le lieu de Black de sa fonction de transfert en boucle ouverte FTBO(p) dans le sens des pulsations croissantes, on laisse le point critique C à sa droite.

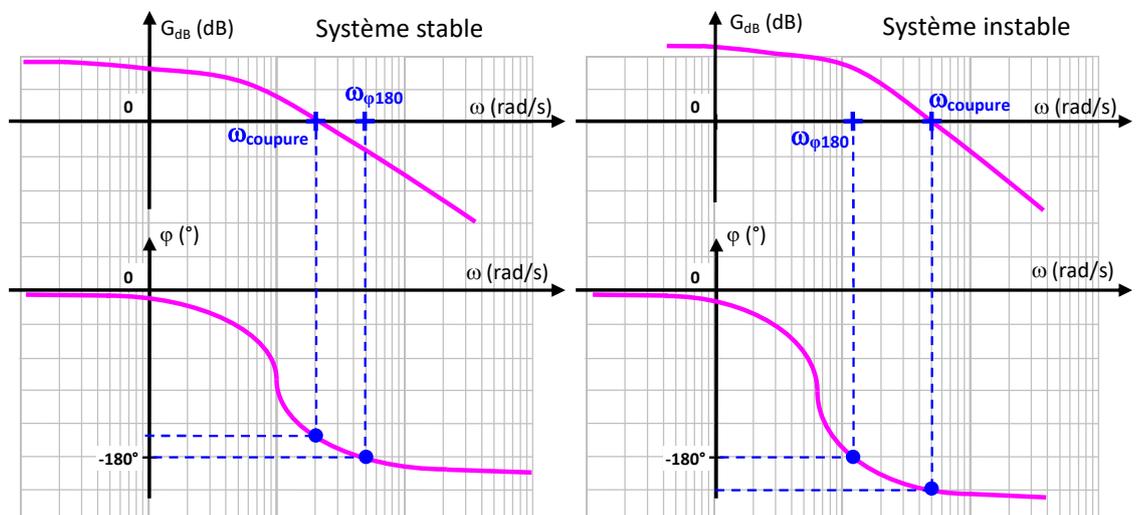


#### Critère graphique du revers dans le plan de Bode

Du fait de l'utilisation de deux diagrammes, il n'est plus possible de localiser le point critique, par conséquent l'analyse de la stabilité dans le plan de Bode est plus complexe que dans le plan de Black.

**Un système asservi, stable en boucle ouverte, est asymptotiquement stable en boucle fermée si :**

- à la pulsation  $\omega = \omega_{\varphi 180}$  pour laquelle  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})) = -180^\circ$ , on a  $|\text{FTBO}(j\omega_{\varphi 180})| < 0\text{dB}$  ou bien,
- à la pulsation  $\omega = \omega_{\text{coupure}}$  pour laquelle  $|\text{FTBO}(j\omega_{\text{coupure}})| = 0\text{dB}$ , on a  $\arg(\text{FTBO}(j\omega_{\text{coupure}})) > -180^\circ$ .



<sup>(6)</sup> Non prise en compte des non-linéarités, retards, ...

<sup>(7)</sup> La définition de ces marges est dans le même esprit que la mise en place de coefficients de sécurité en dimensionnement de structures.



<sup>(8)</sup> et <sup>(9)</sup> On cherche souvent à ce que la boucle fermée ait un comportement de type 2<sup>nd</sup> ordre. On aime bien ce genre de comportement en automatique car on les maîtrise bien. De plus, par rapport aux systèmes du 1<sup>er</sup> ordre, ils offrent plus de degrés de liberté. Assurer  $M_\phi \geq 45^\circ$  sur la BO permet l'obtention d'un dépassement  $D_1$  en régime indiciel sur le système bouclé inférieur à 20%, ce qui est souvent acceptable. Aussi pour les systèmes dont le comportement en BF est comparable à celui d'un 2<sup>nd</sup> ordre oscillant amorti, on peut estimer le coefficient d'amortissement  $z$  par  $z \approx \frac{M_\phi(^{\circ})}{100}$ . Choisir donc  $z \approx 0,43$  permet d'obtenir  $M_\phi \approx 45^\circ$ .

### 3.3. Marges de stabilité

Dans la pratique, il est nécessaire de faire fonctionner un système suffisamment loin de son point d'instabilité, ceci pour plusieurs raisons. Lors de la conception d'un système, de nombreuses hypothèses <sup>(6)</sup> sont prises et, de ce fait, les modèles utilisés pour les fonctions de transfert sont forcément parfois un peu éloigné du comportement réel. Lors de l'utilisation du système, les composants électroniques ont des caractéristiques qui évoluent avec le temps (température, vieillissement...). Il est donc nécessaire de prévoir des « marges <sup>(7)</sup> » vis à vis du problème d'instabilité qui « garantissent » que le point critique ne sera jamais atteint.

#### Marge de phase

La marge de phase est définie telle que  $M_\phi = 180^\circ + \arg(FTBO(j\omega_{coupure}))$  où  $\omega_{coupure}$  est la pulsation de coupure pour laquelle  $|FTBO(j\omega_{coupure})| = 0dB$ .

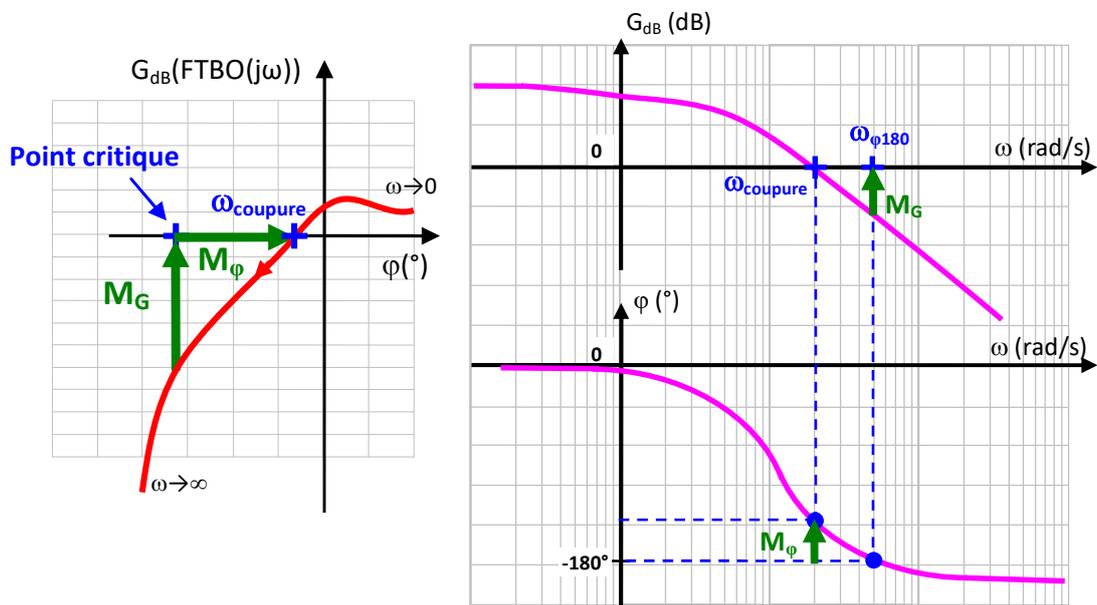
On cherche généralement à obtenir une marge de phase de  $45^\circ$ , valeur empirique<sup>(8)</sup> qui garantit un fonctionnement correct de la plupart des systèmes.

#### Marge de gain

La marge de gain est définie telle que  $M_G = -20\log|FTBO(j\omega_{\phi 180})|$  où  $\omega_{\phi 180}$  est la pulsation pour laquelle  $\arg(FTBO(j\omega_{\phi 180})) = -180^\circ$ .

La marge de gain est une garantie que le système restera stable malgré une variation imprévue du gain ou une imprécision sur sa valeur. Une marge de gain de 6dB permet une latitude d'un facteur 2 sur le gain en boucle ouverte. La valeur retenue est généralement comprise entre 6 et 10 dB.

#### Illustrations des marges de gain et de phase dans le plan de Black et de Bode



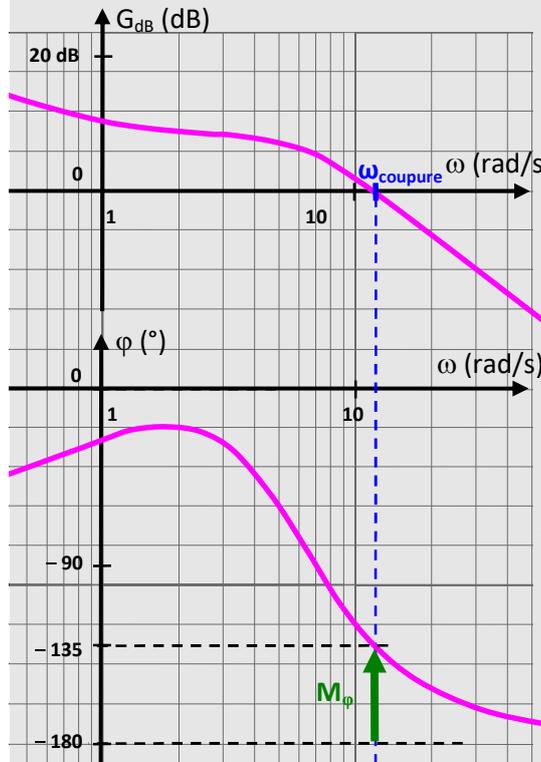
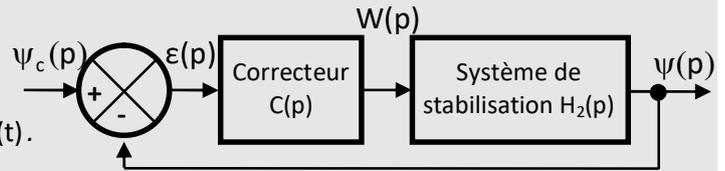
#### Critère de la surtension en boucle fermée

En « commande d'axe », on cible souvent un système stable avec un coefficient d'amortissement empirique<sup>(9)</sup> autour de  $z_{BF} \approx 0,43$ . Ce coefficient d'amortissement conduit à un

facteur de résonance en boucle fermée  $Q_{dB} = 20 \cdot \log \frac{1}{2 \cdot z \sqrt{1 - z^2}} \approx 2,3 \text{ dB}$ .

Exemple de la chaîne de régulation de l'inclinaison du scooter en mode auto-balancé :

La consigne de la régulation de l'inclinaison du châssis  $\psi(t)$  par rapport à la verticale est notée  $\psi_c(t)$ .



Données :  
 $K_1 = 0,24 \text{ rad/V}$   
 $\omega_1 = 4,1 \text{ rad/s}$   
 $K_v = 2,15 \text{ rad/V}$   
 $K_p = 13,5 \text{ V/rad}$   
 $K_i = 31,7 \text{ V/rad}$   
 $T_i = 0,93 \text{ s}$

Sur le système il existe un correcteur Proportionnel Intégral (PI) de fonction de transfert  $C(p) = K_i \cdot (1 + \frac{1}{T_i \cdot p})$  qui élabore le signal  $w(t)$  (de transformée de Laplace  $W(p)$ ) à partir de l'écart  $\epsilon(t) = \psi_c(t) - \psi(t)$ .

Pour étudier graphiquement la stabilité du système il faut déterminer la FTBO  $T(p)$  :

$$T(p) = K_i \cdot (1 + \frac{1}{T_i \cdot p}) \cdot \frac{K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \cdot \frac{1}{(K_p \cdot K_1 - 1) \cdot \omega_1^2 \cdot p^2 + \frac{K_v \cdot K_1}{K_p \cdot K_1 - 1} \cdot p + 1}$$

$$T(p) = 31,7 \cdot (1 + \frac{1}{0,93 \cdot p}) \cdot \frac{0,107}{0,0265 \cdot p^2 + 0,23 \cdot p + 1}$$

Graphiquement on constate à l'aide du critère du revers que le système est stable. Sa marge de phase pour  $\omega_{coupure}$  étant égale à  $M_\phi = 45^\circ$ .

#### 4 - CAUSES D'INSTABILITE

##### 4.1. Le gain en boucle ouverte

Pour les FTBO d'ordre supérieur à 2 l'augmentation du gain en boucle ouverte  $K_{BO}$  peut conduire à un risque d'instabilité.

##### 4.2. Les retards purs

La présence d'un retard pur (il y a en fait dans tous les systèmes) dans la FTBO pourra entraîner l'instabilité du système en BF.

La fonction de transfert d'un retard s'écrit :  $H(p) = e^{-Tp}$  soit  $H(j\omega) = e^{-T \cdot j\omega}$  pour la réponse harmonique. Le module est constant et égal à 1 ( $G = 0 \text{ dB}$ ). L'argument est une fonction linéaire de  $\omega$  :  $\phi = \arg H(j\omega) = -T\omega$ . Ce retard apporte un déphasage croissant lorsque la pulsation croît.

##### 4.3. Les intégrateurs

Chaque intégrateur pur dans la FTBO apporte un déphasage de  $-90^\circ$  sur toute la plage de pulsation, ce qui rapproche le lieu de transfert du point critique et donc tend à déstabiliser le système.

