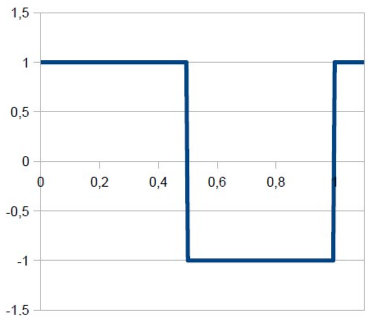
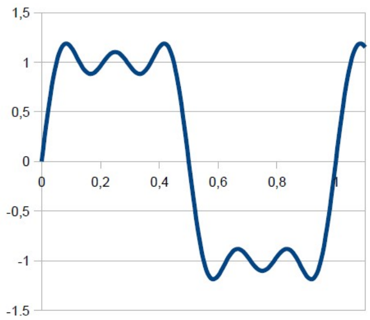
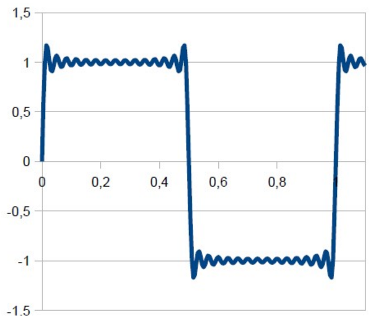
Réponse Harmonique des SLCI et Lieux de Transfert

Le signal réel en entrée d'un système est rarement un signal simple (échelon, rampe). La théorie développée par Fourier permet de considérer que tout signal (périodique ou non) résulte de la sommation d'un ensemble de composantes sinusoïdales de fréquences et d'amplitudes différentes.


Exemple d'un signal en créneau


Utilisation de 3 sinus pour décrire le signal créneau

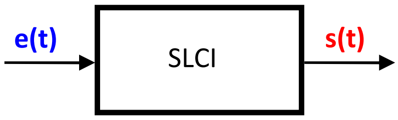

Utilisation de 15 sinus pour décrire le signal créneau

Par conséquent, pour déterminer la réponse d'un système linéaire à un signal quelconque, il est nécessaire de déterminer l'ensemble des réponses de ce système à des signaux sinusoïdaux répartis dans une plage de fréquence adaptée au signal quelconque. Cette étude s'appelle l'analyse fréquentielle.

1 - Reponse Harmonique

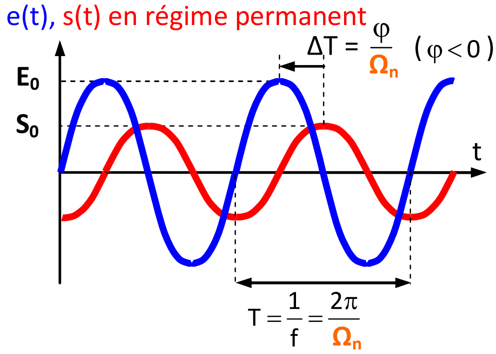
Soit un Système Linéaire Continu et Invariant d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** régi par une équation différentielle à coefficients constants du type :

$$a_n.\frac{d^n s(t)}{dt^n}+...+a_0.s(t)=b_m.\frac{d^m e(t)}{dt^m}+...+b_0.e(t)$$



[1] Ω_n est la **pulsation propre du signal. φ est en rad**

Lorsque l'entrée d'un SLCI est un signal sinusoïdal du type **e(t)** = $E_0.\sin(\Omega_n.t)$ [1], il faut chercher une sortie en régime permanent sous la forme :
s(t) = $S_0.\sin(\Omega_n.(t + \Delta T)) = S_0.\sin(\Omega_n.t + \varphi)$ [1].



[2] sinusoïdale par exemple

On appelle **réponse harmonique**, la **sortie** s(t) **en régime permanent d'un système soumis à une entrée** e(t) **périodique** [2].

On peut caractériser l'effet du système uniquement avec deux grandeurs qui sont :

- le rapport des amplitudes $\frac{S_0}{E_0}$ appelé gain du système et qui représente l'amplification du système,
- le déphasage φ appelé phase et qui représente le décalage de **s(t)** par rapport à **e(t)**.

Les courbes **e(t)** et **s(t)** dessinées ne sont valables que pour la pulsation Ω_n du signal d'entrée. L'objet d'une étude fréquentielle d'un système est d'étudier l'évolution du gain et de la phase, en fonction de la variation de la valeur de la pulsation ω ($\omega = \Omega_n$ avec $0<\Omega_n<+\infty$) du signal d'entrée, sur la réponse harmonique du système.

(3) Ce point a été notamment mis en évidence lors du cours 04.

La principale difficulté lors de l'étude des SLCI vient de l'équation différentielle du système qui est généralement trop complexe[3]. Par conséquent, pour réaliser l'étude fréquentielle d'un système, on exploite aussi la fonction de transfert du système H(p).

On montre par la méthode des complexes que :

- le gain du système $\frac{S_0}{E_0}$ est égal au module du nombre complexe H(jω),
- la phase du système φ est égale à l'argument du nombre complexe H(jω).

Soit $\boxed{\frac{S_0}{E_0} = |H(j\omega)|}$ et $\boxed{\varphi = \varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))}$ où H(jω) correspond à la fonction de transfert du système dans laquelle la variable de Laplace p a été remplacée par jω. H(jω) représente donc le comportement fréquentiel du système H(p).

L'interprétation des variations de gain et de phase en fonction de la fréquence du signal (ou de la pulsation) est fondamentale tant en électronique qu'en automatique, c'est pourquoi le tracé graphique de ces variations est étudié à l'aide de différents diagrammes.

2 - Le Diagramme de Bode, Lieu de Transfert pour les Etudes Frequentielles

(4) C'est d'ailleurs le seul qui est au programme de MPSI/MP et PCSI/PSI.

On appelle lieu de transfert toute représentation graphique du comportement fréquentiel de H(jω) à l'aide de diagrammes. Les diagrammes les plus connus portent le nom de leur inventeur : Bode, Nyquist, Black. L'un des plus utilisés est le diagramme de Bode[4].

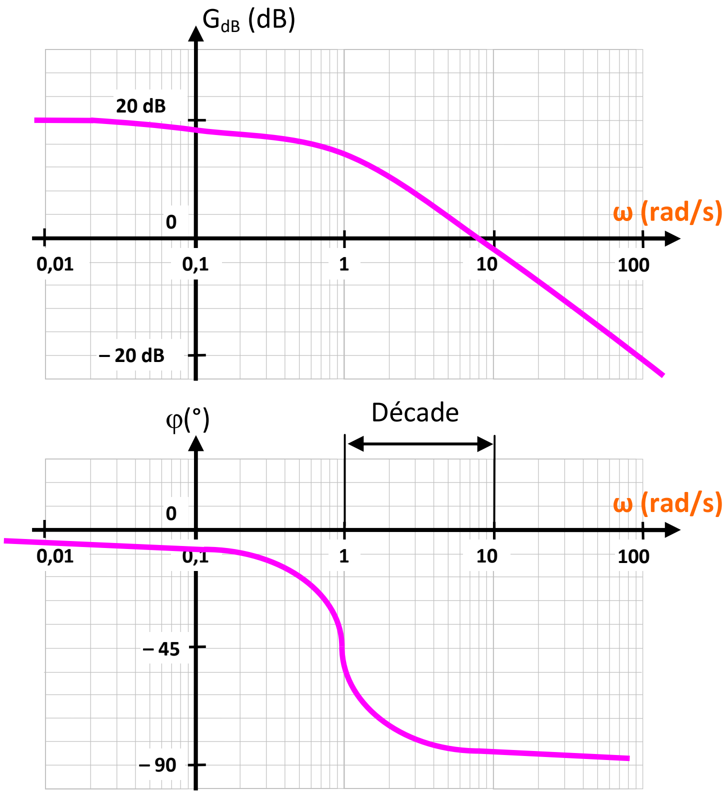
Le diagramme de Bode est constitué de deux courbes correspondant aux tracés du module et la phase de H(jω) en fonction de la fréquence (ou de la pulsation) sur une échelle logarithmique en base 10.

(5) pour calculer un module en décibel on effectue l'opération suivante : $G_{dB} = 20.\log_{10}|H(j\omega)|$

Le module $|H(j\omega)|_{dB}$, noté G_{dB}, est exprimé en décibel [5].

La phase est exprimée en général en degrés.

Les deux courbes sont tracées séparément mais sur la même feuille, l'une en dessous de l'autre, car l'interprétation des résultats nécessite toujours une étude simultanée des deux courbes.



On voit que les tracés sont effectués sur du papier à graduations spéciales. On retrouve une graduation logarithmique en base 10 sur 3 ou 4 décades en abscisse et une graduation millimétrée en ordonnée. Le papier étant généralement vierge, il faut construire l'échelle des ordonnées ainsi que son origine puis l'échelle des abscisses.

Sur l'échelle logarithmique en base 10 il n'y a pas d'origine des abscisses. Par conséquent il n'y a jamais de 0 sur l'axe des abscisses et le tracé ne concernera qu'une bande de pulsation qu'il faudra choisir judicieusement.

Le principe de tracé d'un diagramme de Bode consiste à factoriser le numérateur et le dénominateur de H(jω) suivant la nature des pôles et des zéros. Cette technique permet de décomposer H(jω) en un produit de fonctions de transfert élémentaires bien connues et faciles à tracer dans Bode.

Gain pur — *Produit d'inverses de 1er ordre* — *Produit d'inverses de 2ème ordre*

$$H(j\omega)=\frac{K}{(j\omega)^{\alpha}}\cdot\frac{\prod_m(1+T_m.j\omega)}{\prod_n(1+T_n.j\omega)}\cdot\frac{\prod_k\left[1+\frac{2.z_k}{\omega_{0k}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0k}}.j\omega\right)^2\right]}{\prod_p\left[1+\frac{2.z_p}{\omega_{0p}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0p}}.j\omega\right)^2\right]}$$

Intégrateur(s) — *Produit de systèmes de 1er ordre* — *Produit de systèmes de 2ème ordre*

Petit rappel mathématique utile :

$$\arg\left(\frac{1}{1+T_n.j\omega}\right)=-\arg(1+T_n.j\omega)=-\arctan(Im/Re)=-\arctan(T_n.\omega)$$

L'argument de H(jω) est alors la somme des arguments de chaque fonction de transfert élémentaire :

$$\arg(H(j\omega))=\arg\left(\frac{K}{(j\omega)^{\alpha}}\right)+\sum_m\arg(1+T_m.j\omega)+\sum_k\arg\left(1+2.\frac{z_k}{\omega_{0k}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0k}}.j\omega\right)^2\right)$$
$$-\sum_n\arg(1+T_n.j\omega)-\sum_p\arg\left(1+2.\frac{z_p}{\omega_{0p}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0p}}.j\omega\right)^2\right)$$

Le module de H(jω) est alors le produit des modules de chaque fonction de transfert élémentaire.

L'échelle en dB permet de transformer le produit des modules en une somme. On peut donc tracer séparément les diagrammes de Bode de chaque fonction de transfert élémentaire qui compose H(jω), puis faire la somme des modules et des arguments afin d'obtenir le diagramme de Bode final qui correspondra au comportement fréquentiel du système H(jω).

Petit rappel mathématique utile :

$$\left|\frac{1}{1+T_n.j\omega}\right|=\frac{|1|}{|1+T_n.j\omega|}=\frac{1}{\sqrt{Re^2+Im^2}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+T_n^{\,2}.\omega^2}}$$

Si $H(p) = H_1(p).H_2(p)$ alors $20.\log|H(j\omega)| = 20.\log|H_1(j\omega)| + 20.\log|H_2(j\omega)|$

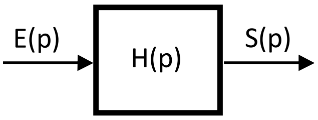
3 - Reponses Frequentielles des Systemes Elementaires

Pour réaliser le diagramme de Bode d'une fonction de transfert quelconque, il est donc nécessaire de connaitre les diagrammes de Bode des fonctions de transfert élémentaires :

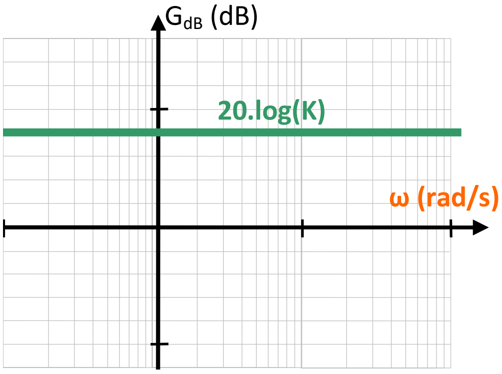
- le gain pur K,
- l'intégrateur $\frac{K}{p}$,
- le premier ordre $\frac{1}{1+T.p}$ et son inverse $(1+T.p)$,
- le second ordre $\frac{1}{1+\frac{2.z}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2}$ et son inverse $(1+\frac{2.z}{\omega_0}.p+\frac{1}{\omega_0^2}.p^2)$.

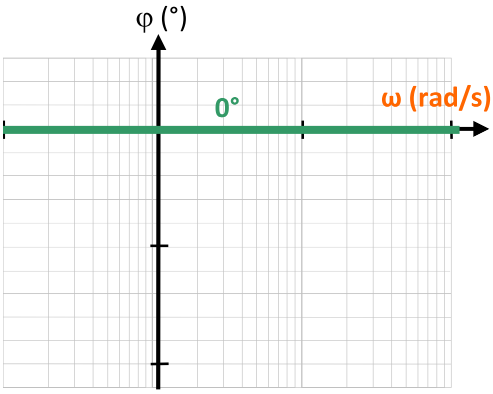
3.1. Réponse fréquentielle des systèmes simples

Gain pur :



H(p) = K



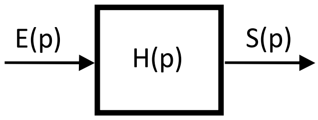


H(p) = K → soit : H(jω) = K

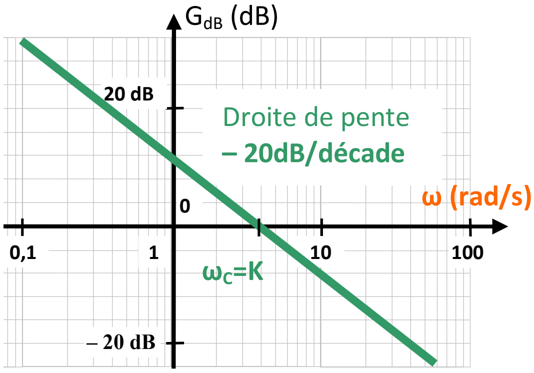
Gain en dB :
G_{dB} = 20.log(K)

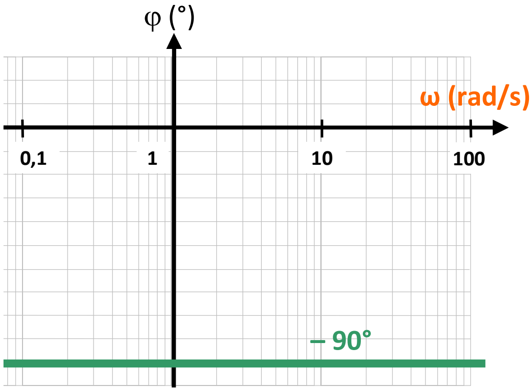
Phase en degrés : $\varphi(\omega) = 0°$

Intégrateur :



$H(p) = \frac{K}{p}$





$H(p) = \frac{K}{p}$ → soit : $H(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$

Gain en dB :

$G_{dB} = 20.\log\left|\frac{K}{j\omega}\right| \overset{(6)}{=} 20.\log(K) - 20.\log(\omega)$

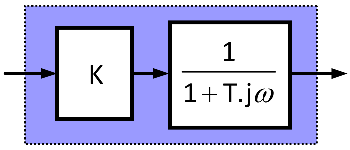
Phase en degrés : $\varphi(\omega) = -90°$

[6] $20.\log\left|\frac{A}{B}\right| = 20.\log|A| - 20.\log|B|$

3.2. Réponse fréquentielle du système du 1^er^ ordre

Le système d'ordre 1 a pour fonction de transfert

$H(p) = \frac{K}{1+T.p}$ soit $H(j\omega) = \frac{K}{1+T.j\omega}$.



On décompose la fonction de transfert $\frac{K}{1+T.p}$ en un produit d'un gain pur K et d'un système d'ordre 1 et de gain statique 1

Gain en dB : $G_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log K - 20\log\sqrt{1+T^2.\omega^2}$

Phase : $\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arg(1+T.j\omega) = -\arctan(T.\omega)$

Asymptotes du diagramme de Bode :

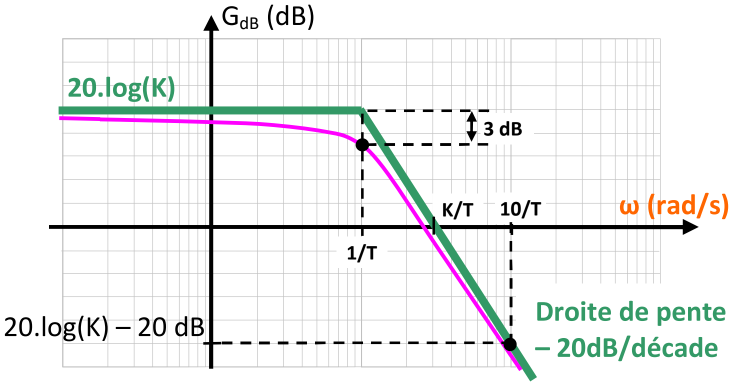
- Pour $\omega \to 0$ $H(j\omega) \approx K$ (équivalent à un comportement de gain pur)

  $G_{dB} = 20\log|H(j\omega)| \approx 20\log K$ et $\varphi = \arg(H(j\omega)) \approx 0°$

- Pour $\omega \to \infty$ $H(j\omega) \approx \dfrac{K}{T.j\omega}$ (équivalent à un comportement d'intégrateur)

$$G_{dB} = 20\log_{10}|H(j\omega)| \approx 20\log\frac{K}{T} - 20\log\omega \text{ (droite de pente } -20 \text{ dB/décade)}$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) \approx -90°$$



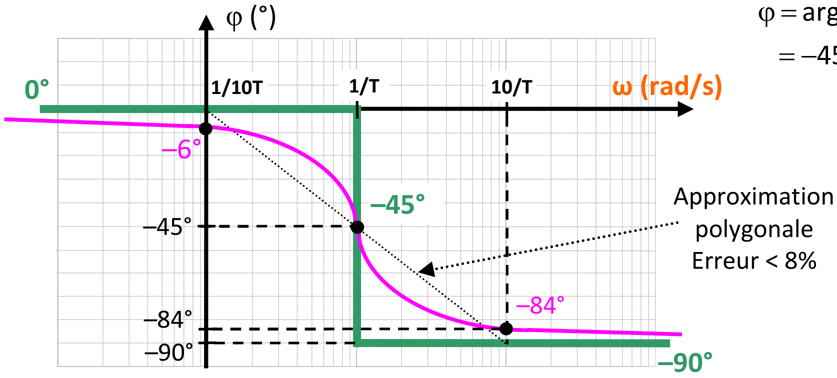
Valeur particulière pour la pulsation de cassure :

$\omega_c = \dfrac{1}{T}$ où ω_c correspond à la pulsation de cassure du diagramme de Bode.

$$G_{dB} = 20\log|H(j\omega_c)|$$

$$G_{dB} = 20\log\frac{K}{\sqrt{2}} = 20\log K - 3dB$$

$$\varphi = \arg(H(j\omega)) = -\arctan(1) = -45°$$



Pour ω=1/2T et ω=2/T on a le tracé réel qui est 1 dB en dessous du tracé asymptotique.

On distingue 2 tracés sur le diagramme de Bode : un tracé asymptotique (le vert) et le tracé réel (le rose).

3.3. Réponse fréquentielle du système du 2ème ordre

Le système d'ordre 2 a pour fonction de transfert [7] : $H(p) = \dfrac{K}{(1 + \dfrac{2.z}{\omega_0}p + \dfrac{1}{\omega_0{}^2}p^2)}$.

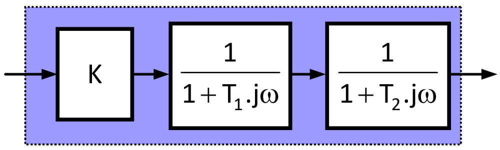
Soit $H(j\omega) = \dfrac{K}{(1 + \dfrac{2.z}{\omega_0}.j\omega + \dfrac{1}{\omega_0{}^2}(j\omega)^2)}$ pour une étude fréquentielle.

[7] Avec : K gain statique, z coefficient d'amortissement et ω_0 pulsation propre du système.

- **Cas z>1 ou z=1**
  La fonction de transfert présente 2 pôles réels p_1 et p_2 [8], distincts ou confondus.

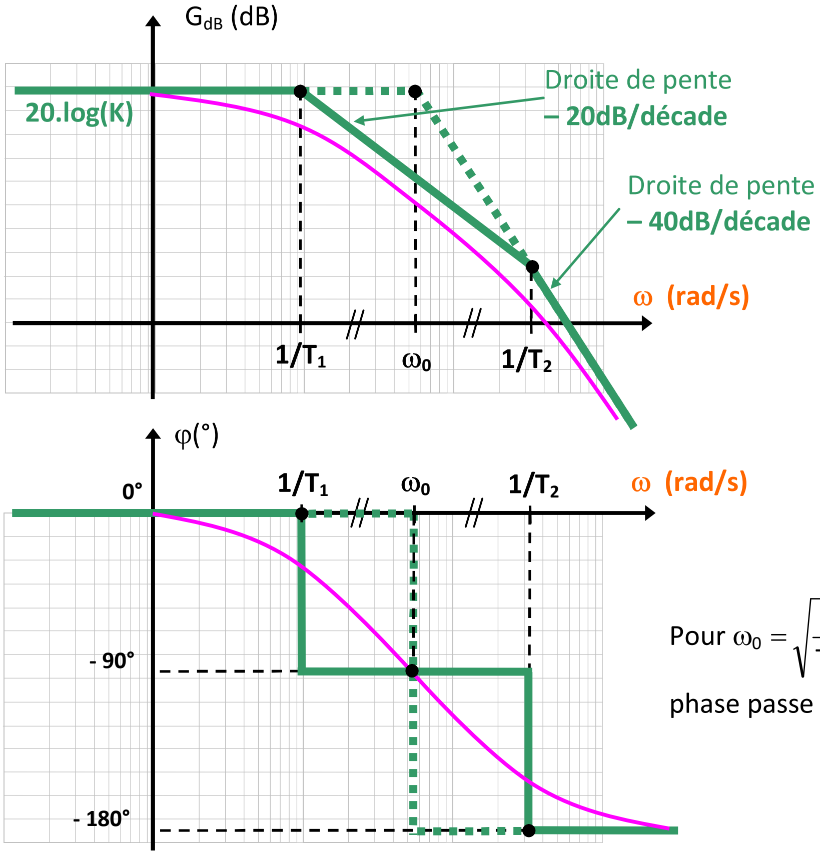
[8] voir cours 07

Pour z>1, le système peut être considéré comme le produit de deux systèmes de 1er ordre de constantes de temps $T_1 = -\dfrac{1}{p_1}$ et $T_2 = -\dfrac{1}{p_2}$.



Le tracé asymptotique se construit alors en ajoutant les tracés du gain et des deux systèmes du premier ordre construits séparément dans un premier temps.

Pour z = 1, la fonction de transfert devient un carré parfait : $H(j\omega) = \dfrac{K}{(1+T.j\omega)^2}$ avec $T = \dfrac{1}{\omega_0}$. (seul son tracé asymptotique est représenté en pointillés sur la figure).



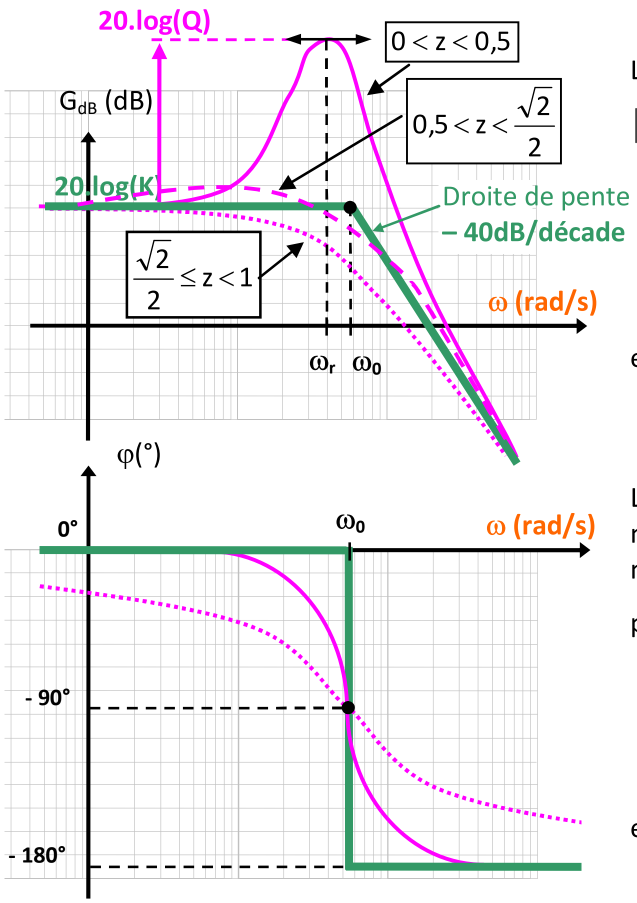
Pour $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{T_1.T_2}}$ la courbe de phase passe toujours par – 90°.

- **Cas z<1**

Dans ce cas les pôles sont complexes conjugués[9].

[9] voir cours 07

En terme d'allure, à partir de z < 0,5 le tracé réel est toujours au dessus du tracé asymptotique. Entre 0,5 et 0,7, il y a une résonance mais le tracé réel coupe 2 fois les asymptotes. Pour z = 0,5, le tracé réel passe par le point d'intersection des 2 asymptotes.



Uniquement le diagramme

Le module de la réponse harmonique est :

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4z^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

et son argument $\varphi = -\arctan\left(\dfrac{2z.\dfrac{\omega}{\omega_0}}{\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}\right)$

La courbe de gain peut présenter un maximum suivant les valeurs de z. Ce maximum, s'il existe, est obtenu pour la pulsation ω_R telle que $\dfrac{dG}{d\omega}(\omega_R) = 0$,

soit $\left[\dfrac{d\left(\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + 4z^2\omega_0^2\omega^2\right)}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_R} = 0$ ou

encore $-4\omega_R\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right) + 8z^2\omega_0^2\omega_R = 0$.

On obtient $\boxed{\omega_R = \omega_0 \cdot \sqrt{1-2z^2}}$ si $z < \sqrt{2}/2$. Cette pulsation est appelée **pulsation de résonance**.

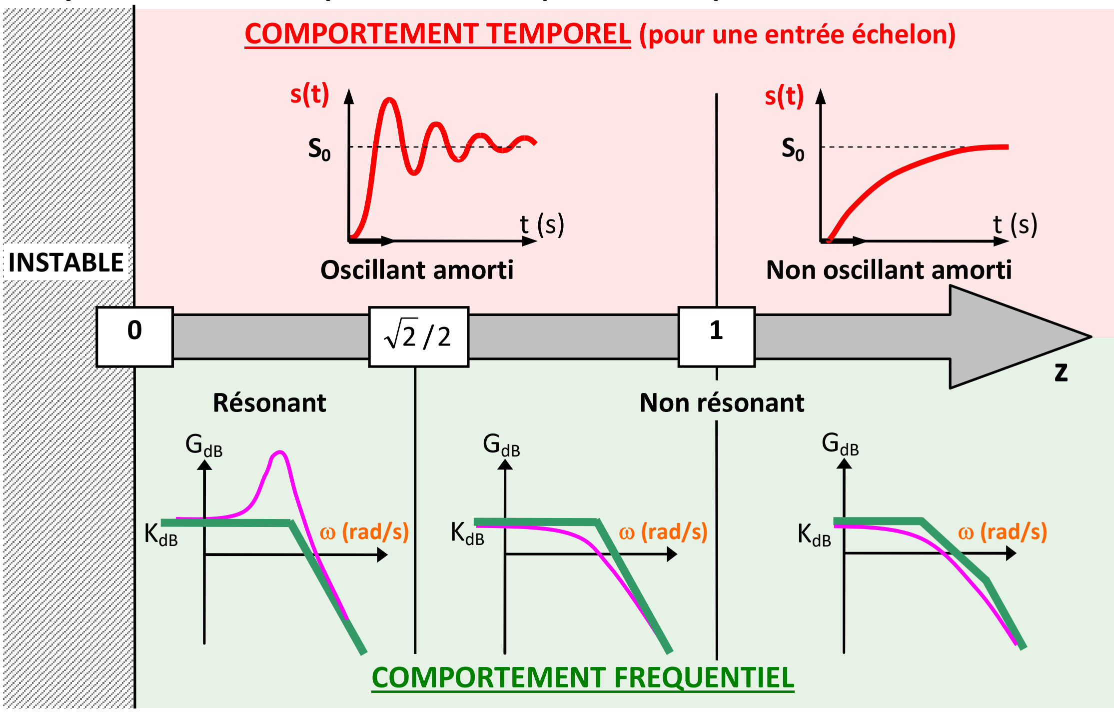
Ce maximum est alors caractérisé par le **coefficient de surtension Q** :

$$\boxed{Q = \frac{|H(j\omega_R)|}{|H(j0)|} = \frac{1}{2z \cdot \sqrt{1-z^2}}}$$

Les courbes définies par le diagramme de Bode restent très proches de leurs asymptotes, sauf près du point d'intersection des asymptotes. C'est pourquoi, à la main, elles se tracent en deux temps, tracé des asymptotes puis tracé des courbes réelles avec quelques points particuliers[10].

[10] Dans la pratique on utilise bien évidemment l'outil informatique et des logiciels dédiés pour ces tracés.

3.4. Synthèse sur les comportements temporels et fréquentiels du 2ème ordre



4. Méthode de construction du diagramme de Bode de systèmes d'ordre quelconque

Etape n°1 : La fonction de transfert peut se mettre en général sous la forme :

Gain pur — *Produit d'inverses de 1er ordre* — *Produit d'inverses de 2ème ordre*

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^{\alpha}} \cdot \frac{\prod_m (1+T_m.j\omega)}{\prod_n (1+T_n.j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left[1+\frac{2.z_k}{\omega_{0k}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0k}}.j\omega\right)^2\right]}{\prod_p \left[1+\frac{2.z_p}{\omega_{0p}}.j\omega+\left(\frac{1}{\omega_{0p}}.j\omega\right)^2\right]}$$

Intégrateur(s) — *Produit de systèmes de 1er ordre* — *Produit de systèmes de 2ème ordre*

Elle apparaît ainsi comme la mise en cascade d'éléments simples du 1er et 2nd ordre, de leurs inverses d'un gain et d'intégrateurs multiples.

Etape n°2 : On classe les constantes de temps dans un ordre décroissant, c'est à dire les pulsations de cassure ($1/T_i$ pour un 1er ordre et ω_0 pour un 2nd ordre) correspondantes dans un ordre croissant. Les brisures du tracé asymptotique correspondront alors à ces pulsations.

Etape n°3 : Construire le diagramme de Bode de $H(j\omega)=\dfrac{K}{(j\omega)^{\alpha}}$, puis successivement en avançant vers les pulsations croissantes, faire intervenir les pôles et les zéros selon l'ordre précédent en utilisant les constructions asymptotiques.

Etape n°4 : Affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.

Les constantes de temps sont donc T_1 = 1 s (soit ω_1 = 1 rad/s), T_2 = 0,5 s (soit ω_2 = 2 rad/s) et T_3 = 0,05 s (soit ω_2 = 20 rad/s).

Exemple : Soit la fonction de transfert : $H(p)=\dfrac{10+5p}{p+1{,}05.p^2+0{,}05.p^3}$

Celle-ci peut encore s'écrire : $H(p)=\dfrac{10.(1+0{,}5p)}{p\cdot(1+p).(1+0{,}05p)}=\dfrac{10}{p}\cdot\dfrac{1}{1+p}\cdot(1+0{,}5p)\cdot\dfrac{1}{1+0{,}05p}$

On commence par construire les asymptotes de gain et de phase pour $\dfrac{10}{p}$.

Puis, successivement, en avançant vers les ω croissants, on fait intervenir les termes du 1er ordre : $\dfrac{1}{1+p}$ *puis* $(1+0{,}5p)$ *puis* $\dfrac{1}{1+0{,}05p}$.

Ici on ne construira que le tracé asymptotique car tracer à la main la courbe réelle n'a plus vraiment de sens compte tenu des outils informatiques actuels.