

# Fiche 01 - Rappels sur l'Automatique en CPGE

<sup>(1)</sup> Les systèmes de commande automatiques s'inspirent le plus souvent du comportement de l'homme.

<sup>(2)</sup> Une information analogique peut prendre, de manière continue, toutes les valeurs possibles dans un intervalle donné. Un signal analogique peut être représenté par une courbe continue.

<sup>(3)</sup> Une information discrète est constituée d'un nombre fini de valeurs, on distingue :

- information logique « V/F » ou « 0/1 » associée à l'état d'une variable.
- information numérique sous la forme d'un mot binaire, constitué de plusieurs bits (variables binaires 0/1). Cette information numérique est en général issue d'un traitement (échantillonnage et codage) d'une information analogique.

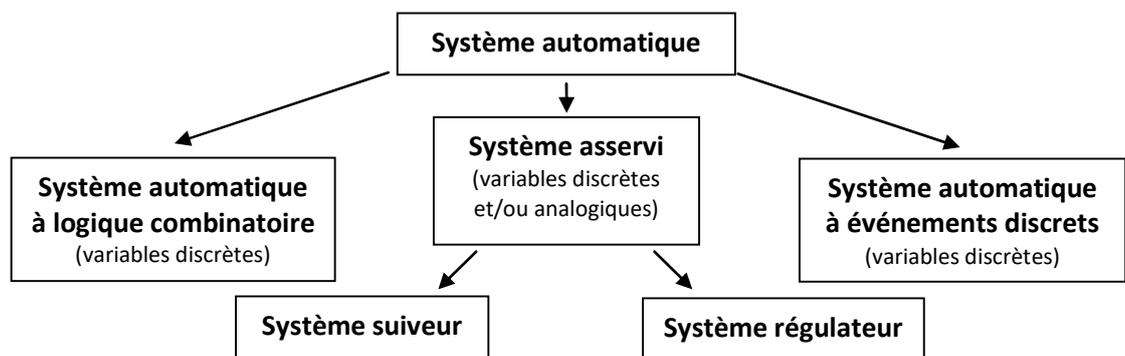
<sup>(4)</sup> Le schéma bloc fonctionnel correspond à l'architecture organique retrouvée lors de l'analyse structurelle.

**Automatique :** Discipline scientifique traitant, d'une part, de la caractérisation des systèmes automatiques et d'autre part, du choix de la conception et de la réalisation du système de commande afin d'obtenir, en sortie du système, un comportement déterminé <sup>(1)</sup>.

Exemple : Voiture avec système de stationnement automatique (Xpark)



**Classification des systèmes automatiques :** Les systèmes automatiques sont découpé en 3 catégories mais aussi classés en fonction de la nature de leurs informations de commande et de mesure (informations : **analogiques** <sup>(2)</sup> et **discrètes** <sup>(3)</sup>).

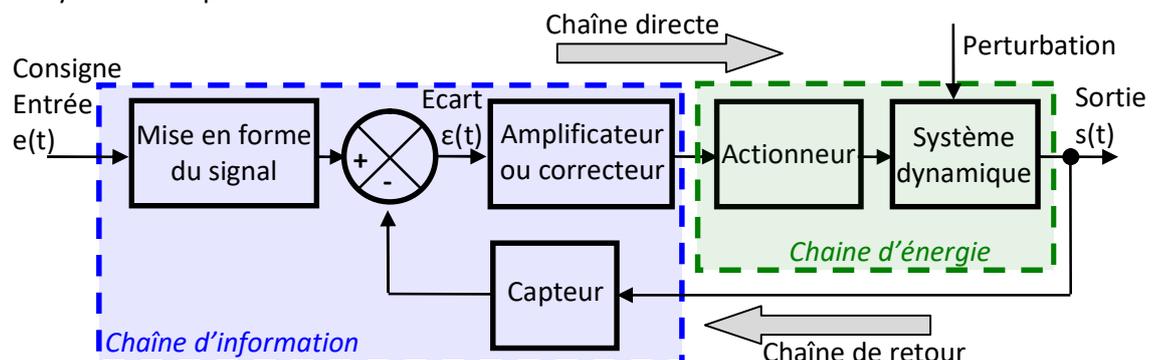


Les **systèmes asservis suiveurs** sont en poursuite d'une loi de référence (= **consigne d'entrée varie en permanence**). L'objectif de ce système est d'ajuster en permanence le signal de sortie au signal d'entrée.

Les **systèmes régulateurs** ont une **consigne d'entrée est fixe**, ils sont destinés à maintenir une sortie constante pour une consigne d'entrée constante tout en s'adaptant aux perturbations.

## Structure générique d'un système asservi :

Les systèmes automatisés industriels sont par nature complexes et la représentation en schéma bloc fonctionnel <sup>(4)</sup> permet de décomposer ce système en plusieurs sous-systèmes élémentaires. Chaque sous système, plus facilement modélisable, correspondra à un bloc. Par « assemblage » des différents blocs, il est ensuite possible d'étudier le comportement global du système complexe.



# Fiche 02 - Démarche de Modélisation et d'Étude des Systèmes Asservis en CPGE

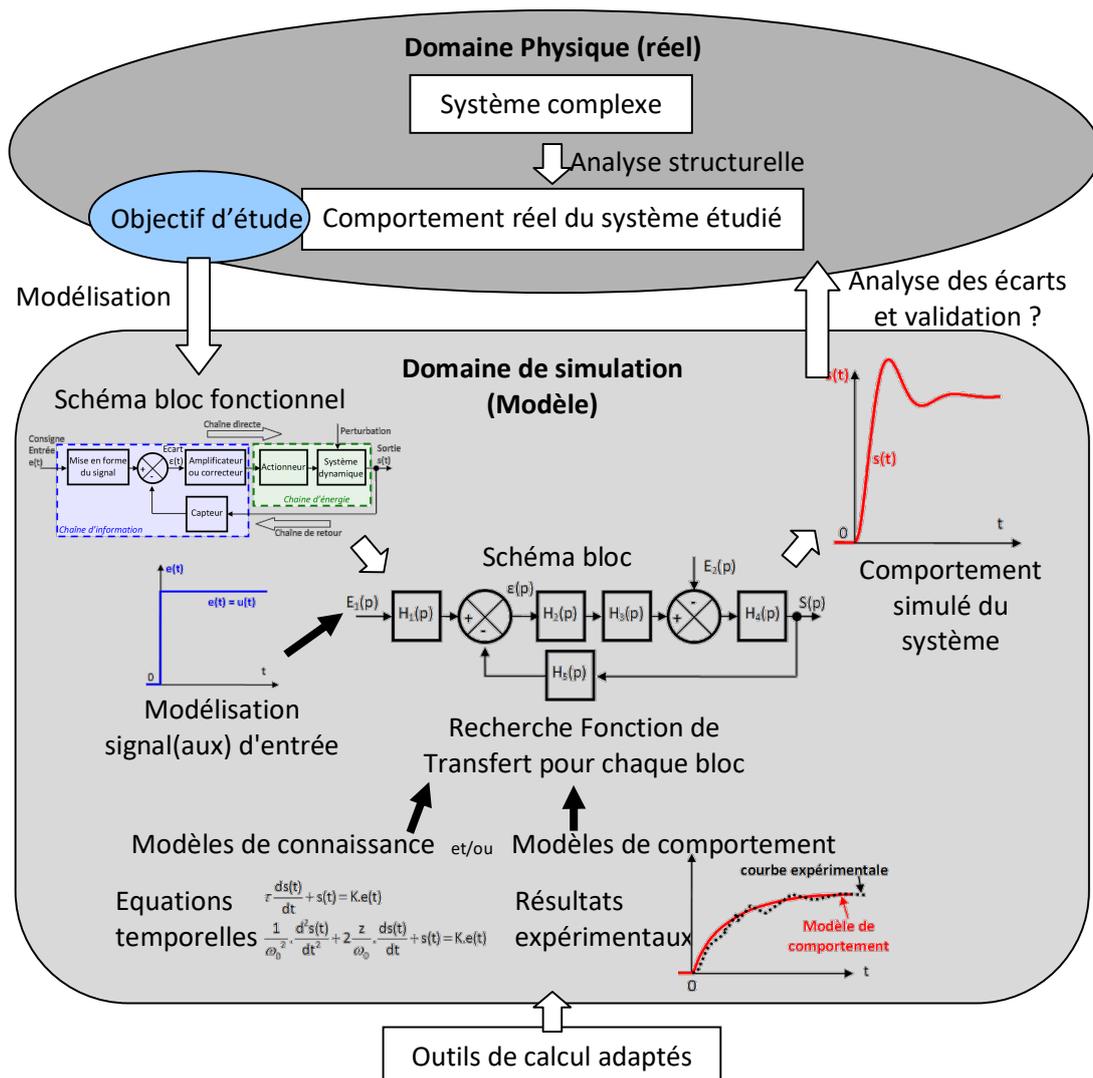
<sup>(1)</sup> A l'usage on construit directement le schéma bloc sans passer par le schéma bloc fonctionnel.

<sup>(2)</sup> Les modèles de connaissance proviennent d'équations correspondant aux lois fondamentales issues de la physique. Cependant des modèles de connaissances ne sont pas toujours disponibles pour modéliser certains composants trop complexes. On utilise alors des modèles de comportement. On construit un modèle de comportement en identifiant des lois mathématiques permettant de modéliser le composant complexe à partir des courbes obtenues par l'expérimentation.

<sup>(3)</sup> Cette étape permet de simplifier les modèles cependant, sa validité restera limitée à de petites variations autour du point de fonctionnement choisi lors de la linéarisation.

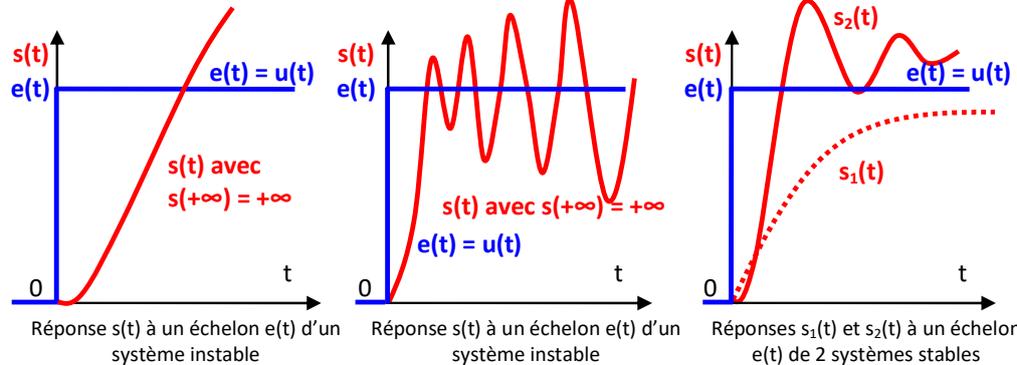
L'objectif est d'établir un **modèle théorique** d'un système asservi en **Système Linéaire Continu Invariant** pour prévoir son comportement et élaborer sa commande. Ce modèle théorique du système est généralement obtenu après plusieurs étapes :

- La première étape correspond à une phase de **modélisation des entrées** du système ainsi que du **système lui-même en schéma bloc fonctionnel** <sup>(1)</sup>.
- On élabore ensuite le modèle théorique complet du système sous la forme d'un schéma bloc. Les fonctions de transfert des différents blocs du schéma bloc sont obtenues à partir de **modèles de connaissance** et/ou à partir de **modèles de comportement** <sup>(2)</sup>. Dans cette phase, les modèles de connaissance sont souvent traduits par une relation mathématique non linéaire qui peut être assez complexe. Pour palier à ce problème, on simplifie ces modèles de connaissance en les **linéarisant autour d'un point de fonctionnement** <sup>(3)</sup>.
- L'ensemble du schéma bloc étant déterminé, le comportement simulé du modèle est ensuite déterminée grâce à des outils de calcul adaptés.
- Enfin les résultats obtenus doivent être comparés aux résultats expérimentaux du système réel et analysés à l'aide de critères pour valider ou invalider le modèle.

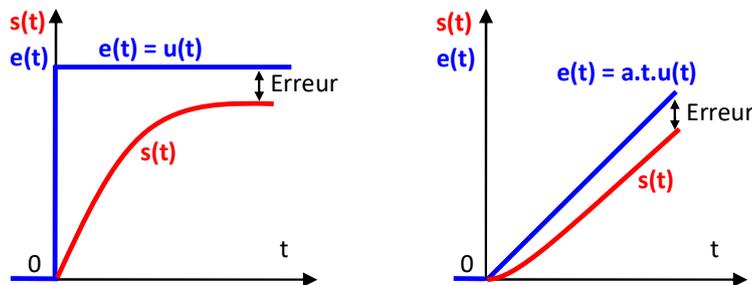


# Fiche 03 - Critères de Performances des SLCI

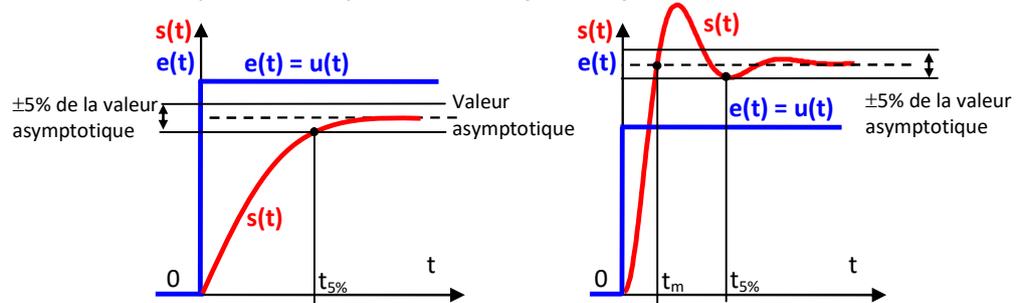
**Stabilité** : C'est le critère que l'on regarde en premier. Un système est stable si à une entrée bornée correspond une sortie bornée. On souhaite toujours que le système asservi soit stable.



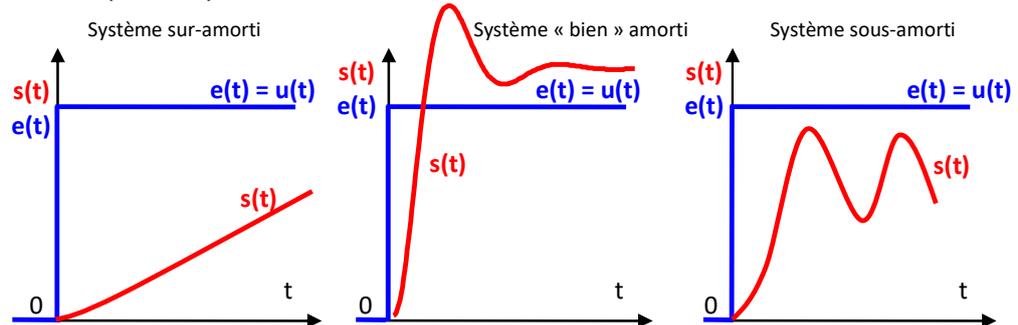
**Précision** : La précision qualifie l'aptitude du système à atteindre la valeur visée en régime permanent. Elle est caractérisée par l'erreur  $e_r(t)$  entre la consigne en entrée et la valeur asymptotique effectivement atteinte par la grandeur de sortie.



**Rapidité** : La rapidité est caractérisée par le temps que met le système à réagir à une variation brusque de la grandeur d'entrée. On retient alors comme principal critère d'évaluation de la rapidité d'un système, le temps de réponse à 5%.



**Amortissement (ordre >2)** : L'amortissement est caractérisé par le rapport entre les amplitudes successives des oscillations de la sortie. Plus ces oscillations s'atténuent rapidement, plus le système est amorti.



Si l'erreur est nulle, on dit que le système est précis.

Attention le temps de réponse à 5% n'est pas le temps mis pour atteindre 5% de la valeur souhaitée !!!

Pour les systèmes oscillants on définit aussi le temps de montée ( $t_m$ ) (ou temps de raideur) qui correspond au temps au bout duquel la réponse passe pour la première fois par sa valeur finale.

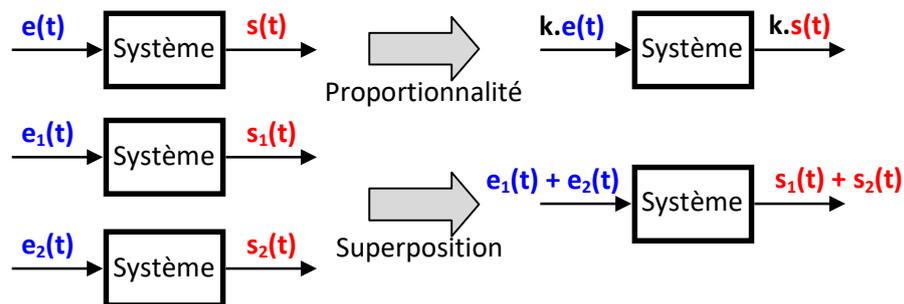
# Fiche 04 - Représentation des Systèmes Asservis en Systèmes Linéaires Continus Invariants

## Hypothèses de modélisation

**Système** : Le système est représenté par un fonction mathématique en entrée  $e(t)$  et en sortie  $s(t)$  respectant le principe de causalité. La cause (entrée) induit la sortie (effets).

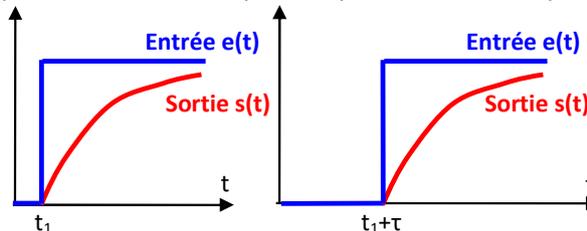


**Linéarité** <sup>(1)</sup>: Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.



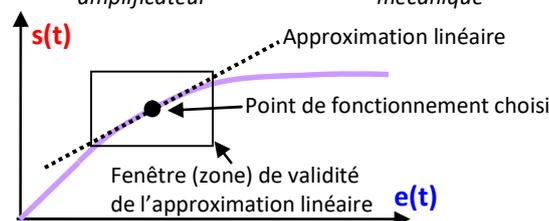
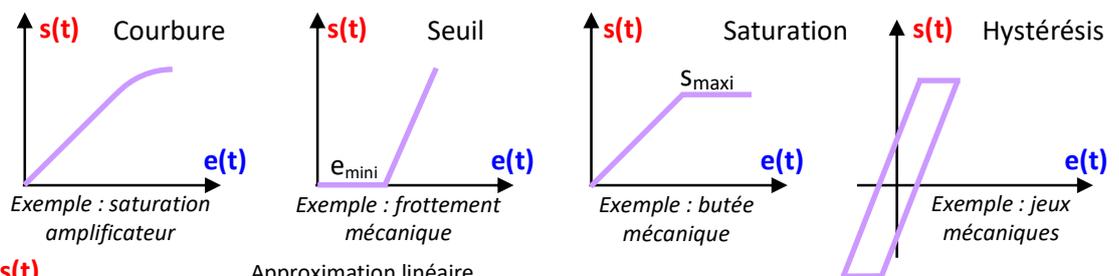
**Système continu** : Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (ils sont caractérisés par des fonctions continues). On parle aussi dans ce cas de système analogique.

**Système invariant** : Un système est dit invariant si on suppose que les caractéristiques du système <sup>(2)</sup> ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").



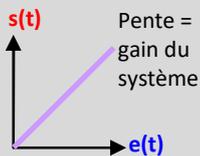
## Principales non linéarité

En réalité aucun système n'est parfaitement linéaire. La caractéristique entrée sortie comporte toujours plus ou moins des non linéarités, notamment aux faibles amplitudes (seuils) ou aux fortes amplitudes (saturation, courbure). Le système est dit non linéaire.



Lorsqu'un modèle est non linéaire, on doit impérativement **linéariser** sa caractéristique entrée-sortie **au voisinage d'un point de fonctionnement choisi** en remplaçant la portion de courbe par une droite <sup>(3)</sup>.

<sup>(1)</sup> Si le système est linéaire on obtient, en traçant la réponse  $s(t)$  en fonction de  $e(t)$  (pour un instant donné ou en régime permanent), la caractéristique du système égale à une droite de pente  $K$  (gain du système).



**Attention à ne pas confondre la caractéristique sortie fonction de l'entrée avec la courbe sortie fonction du temps**

<sup>(2)</sup> masse, dimensions, résistance électrique, impédance, ...

<sup>(3)</sup> Cette étape permet de simplifier les modèles cependant, sa validité restera limitée à de petites variations autour du point de fonctionnement choisi lors de la linéarisation.

<sup>(4)</sup> Lors de l'étude de SLCI, on se place toujours dans le cas de conditions initiales nulles car le niveau initial du système importe peu et que c'est plutôt la réaction à une excitation à partir d'un état stable que l'on souhaite étudier. On peut toujours se ramener à des conditions initiales nulles moyennant un changement d'origine.



Avec  $f(t)=0$  pour  $t<0$  et  $p$  variable complexe.

Conditions initiales nulles : on peut aussi les nommer conditions de Heaviside

## Fonction de transfert d'un SLCI

Le comportement du système asservi modélisé en SLCI est caractérisé par une équation différentielle d'ordre  $n$  reliant la sortie  $s(t)$  à l'entrée  $e(t)$ .

Si on applique la transformée de Laplace

sur l'équation différentielle du système reliant la sortie  $s(t)$  à l'entrée  $e(t)$ , on obtient, pour des conditions initiales nulles <sup>(4)</sup> :  $(a_n \cdot p^n + \dots + a_0) \cdot S(p) = (b_m \cdot p^m + \dots + b_0) \cdot E(p)$ .

On appelle **fonction de transfert**  $H(p)$  du système la relation dans le domaine symbolique telle que  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ . Les fonctions de transfert se présenteront toujours sous forme de fraction

rationnelle, mise sous la forme suivante que l'on appelle **forme canonique** :

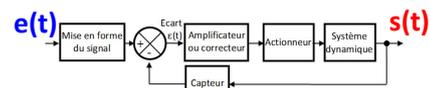
$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot (1 + b'_1 \cdot p + \dots + b'_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + a'_1 \cdot p + \dots + a'_n \cdot p^{n-\alpha})}$$

avec  $\alpha$  : **classe du système** (représente le nombre d'intégration dans le système  $\alpha \geq 0$ )

$n$  : ordre du système, identique à l'ordre de l'équation différentielle

$K$  : **gain statique** (permet de connaître le comportement du système en régime permanent).  $K$  possède une unité (unité de la variable de sortie / unité de la variable d'entrée).

**La fonction de transfert caractérise le comportement intrinsèque du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie.**



Equation différentielle

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

## Transformée de Laplace

**Définition Transformée de Laplace - Définition** :  $\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$

### Tableau des transformées de Laplace usuelles

f(t) avec f(t)=0 pour t<0	F(p)	f(t) avec f(t)=0 pour t<0	F(p)
$\delta(t)$ impulsion de Dirac	1	$t \cdot u(t)$ fonction rampe	$\frac{1}{p^2}$
$u(t)$ échelon unitaire	$\frac{1}{p}$	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$t^n \cdot e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{p^2 + \omega_0^2}$	$\cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega_0^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega_0}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-at} \cdot \cos(\omega_0 t) \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega_0^2}$

**Transformée de la dérivée** :  $\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right) = p^n \cdot F(p)$  pour des conditions initiales nulles.

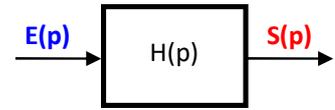
**Transformée de l'intégrale** :  $\mathcal{L}\left(\int f(t) \cdot dt\right) = \frac{F(p)}{p}$  pour des conditions initiales nulles.

### Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale :

- le théorème de la valeur initiale :  $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot F(p)$
- le théorème de la valeur finale :  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot F(p)$

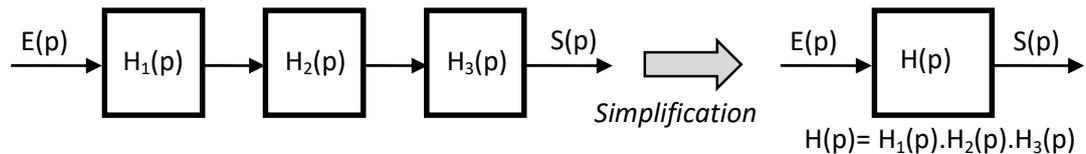
# Fiche 05 - Calcul des Fonctions de Transfert des SLCI

On appelle fonction de transfert  $H(p)$  d'un système la relation dans le domaine symbolique telle que  $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ .

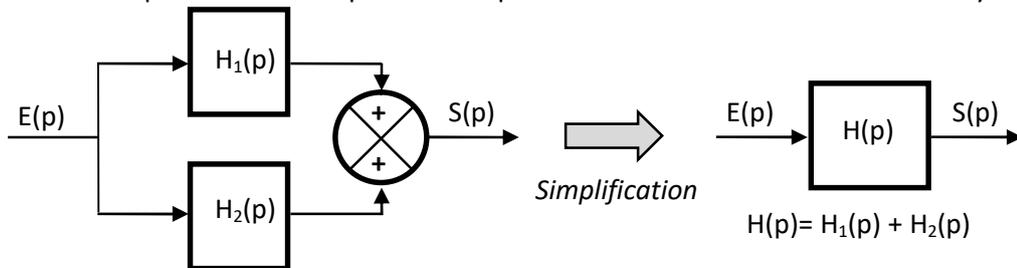


Elle caractérise le comportement intrinsèque du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie.

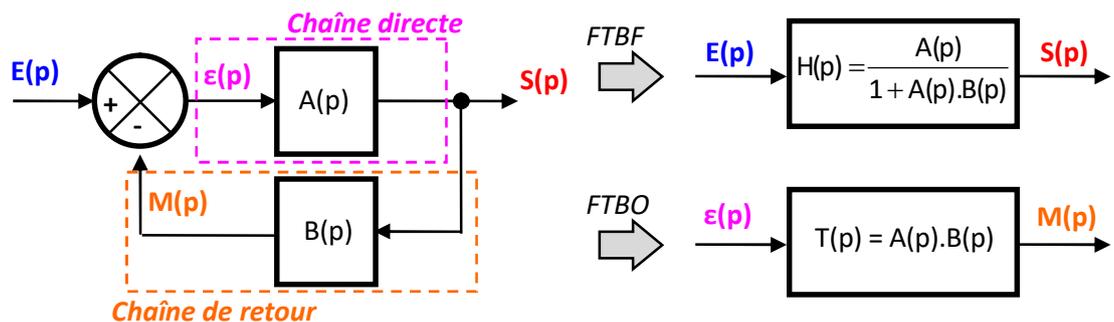
**Blocs en série :** Dans le cas des blocs en série, on effectue le produit des fonctions de transfert de chaque bloc :



**Blocs en parallèle :** Dans le cas des blocs en parallèle, on utilise la relation du sommateur pour déduire simplement l'expression de la fonction de transfert du système :



**Fonction de Transfert Boucle Ouverte (FTBO) et Fonction de Transfert Boucle Fermée (FTBF) :** On détermine la fonction de transfert boucle ouverte et la fonction de transfert boucle fermée sur la base d'un schéma boucle fermée ci-dessous :



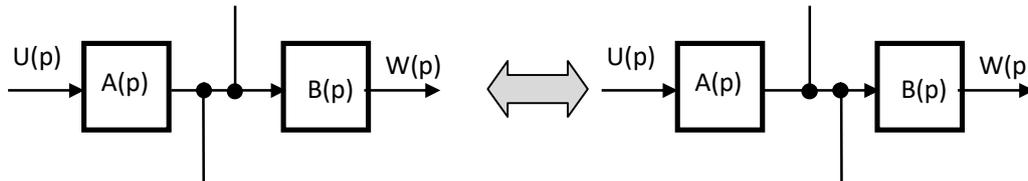
- On utilise la FTBF pour déterminer les réponses temporelles  $s(t)$  d'un système à des entrées  $e(t)$  quelconques.
- La FTBO est utilisée principalement pour déterminer les conditions de stabilité et de précision du système boucle fermée.
- Si la structure du schéma-bloc est complexe, on peut définir des FTBO et FTBF intermédiaires pour tous les sous-systèmes à boucle fermée, mais seules la FTBF et la FTBO de la boucle principale sont utiles à l'évaluation des performances du système.

Dans la pratique on calcule simplement la FTBF à partir de la FTBO grâce aux relations suivantes :

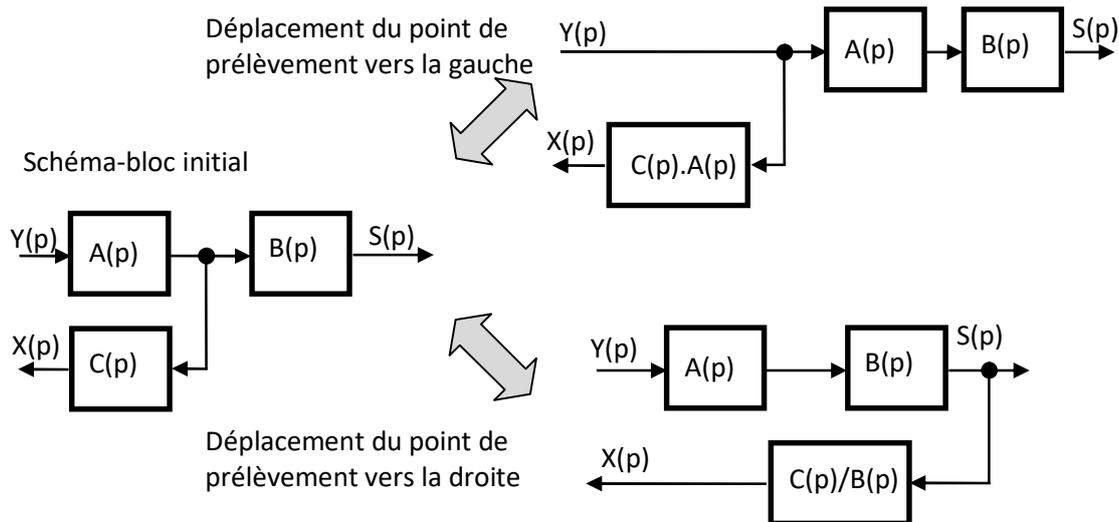
$$FTBF = \frac{FT \text{ de la chaîne directe}}{1 + FTBO} = \frac{1}{FT \text{ de la chaîne de retour}} \cdot \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$



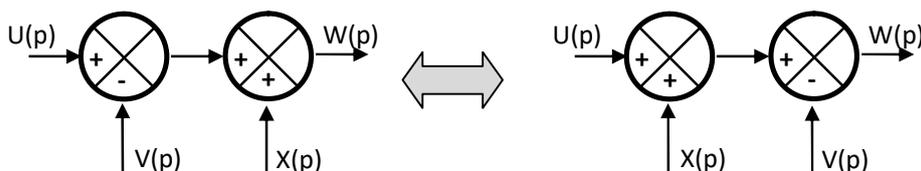
**Déplacements de jonctions en direction d'autres jonctions :** L'objectif est de déplacer une jonction vers une autre jonction puis de les alterner ensuite (de façon à faire disparaître une jonction gênante d'une boucle fermée).



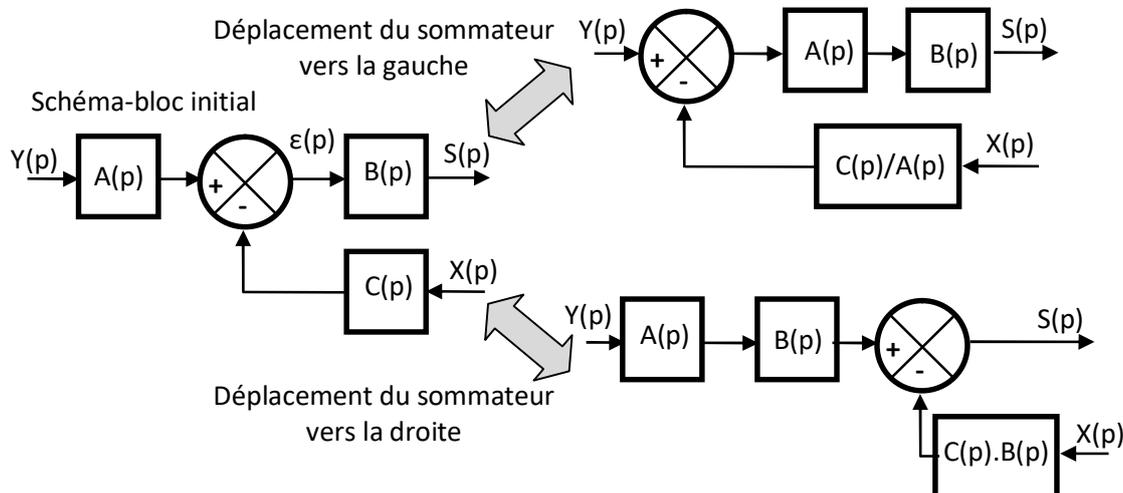
Le déplacement peut se faire vers la gauche ou vers la droite mais il faut faire attention au bloc rajouté dans la branche déplacée.



**Déplacements de sommateurs en direction d'autres sommateurs :** L'objectif est, dans un premier temps, de déplacer un sommateur vers un autre sommateur puis, dans un second temps, de les alterner <sup>(1)</sup>.



Le déplacement peut se faire vers la gauche ou vers la droite et il faut faire attention au bloc rajouté dans la branche déplacée.

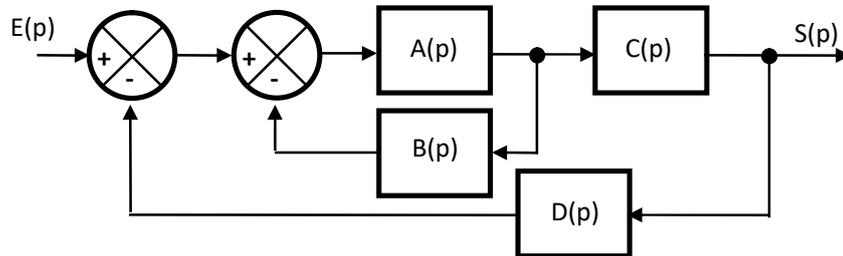


<sup>(1)</sup> de façon à faire disparaître un sommateur gênant en plein milieu d'une boucle fermée

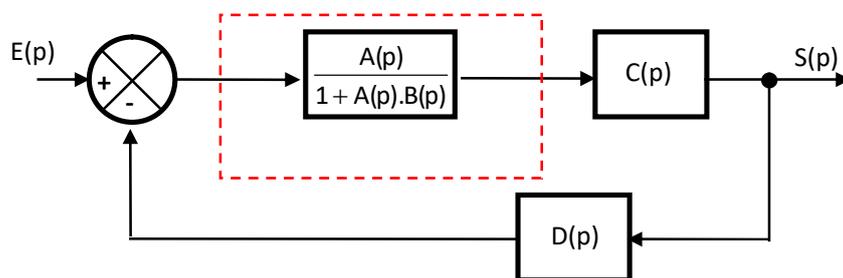


- Il est inutile de déplacer un sommateur en direction d'une jonction ou l'inverse car aucune simplification n'est possible.
- Il faut toujours faire attention au(x) bloc(s) rajouté(s) dans la branche déplacée.

**Système à boucles concentriques :**

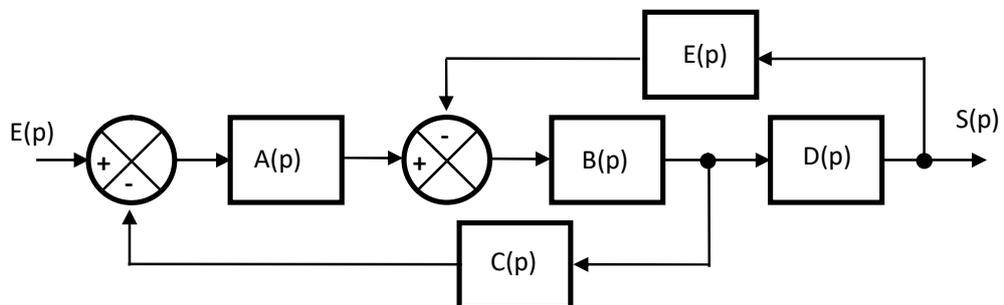


Pour ce type de système, il faut toujours commencer par calculer la FTBF de la boucle interne.

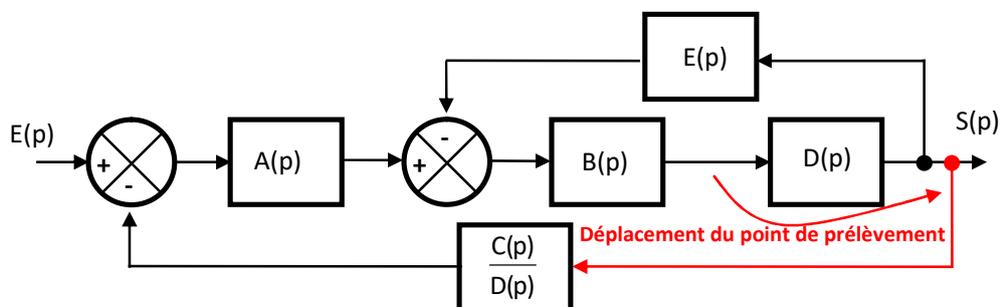


On reconnaît ensuite une boucle fermée que l'on sait bien traiter.

**Système à boucles imbriquées :**

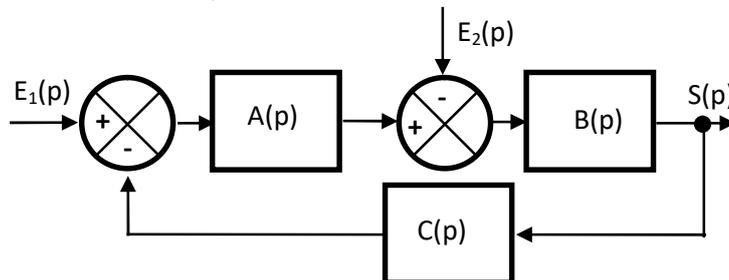


Pour ce type de système, il faut toujours commencer par déplacer les points de prélèvement pour se ramener à un système de boucles concentriques.



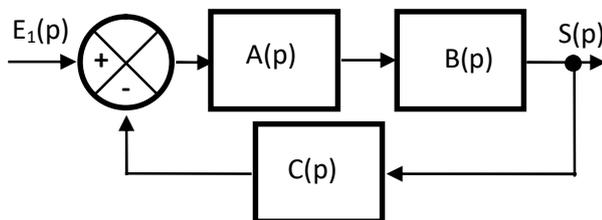
On se retrouve ensuite devant un système à boucles concentriques que l'on sait aussi bien gérer.

**Fonction de Transfert Boucle Fermée des Systèmes Multi-Variables :** Dans un système réel, plusieurs entrées peuvent venir modifier la sortie. Ces entrées comprennent non seulement l'entrée principale mais aussi des entrées supplémentaires très souvent parasites (bruit, effort résistant...).



Pour déterminer la fonction de transfert sur ce type de système, on utilise le principe de superposition des SLCI. On superpose deux modes : un 1<sup>er</sup> mode pour lequel l'entrée E<sub>2</sub>(p) est considérée comme nulle et un 2<sup>nd</sup> mode lequel l'entrée E<sub>1</sub>(p) est considérée comme nulle.

- Mode à entrée E<sub>2</sub>(p)=0

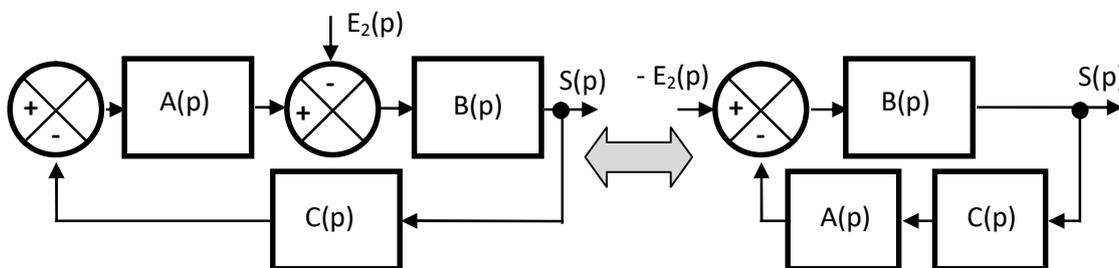


$$H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} = \frac{S(p)}{E_1(p)} \Big|_{E_2(p)=0}$$

$$H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

H<sub>1</sub>(p) est la fonction de transfert en poursuite.

- Mode à entrée E<sub>1</sub>(p)=0



$$H_2(p) \Big|_{E_1(p)=0} = \frac{S(p)}{-E_2(p)} \Big|_{E_1(p)=0} = \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)}$$

H<sub>2</sub>(p) est la fonction de transfert en régulation.

La superposition des 2 modes permet d'obtenir au final la fonction de transfert boucle fermée du système multi-variables :

$$S(p) = H_1(p) \Big|_{E_2(p)=0} . E_1(p) - H_2(p) \Big|_{E_1(p)=0} . E_2(p) = \frac{A(p).B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_1(p) - \frac{B(p)}{1 + A(p).B(p).C(p)} . E_2(p)$$



Le dénominateur de la fonction de transfert en poursuite et de la fonction de transfert en régulation est le même, c'est une caractéristique de la boucle. On montrera par la suite que la stabilité du système (qui ne dépend que de la FTBO) ne dépend pas du nombre d'entrée (cours sur la stabilité de MP).

Seule la réponse à l'échelon est présentée ici.

# Fiche 06 - Réponse Temporelle Systèmes du 1<sup>er</sup> Ordre

Un système physique d'entrée  $e(t)$  et de sortie  $s(t)$  est du 1<sup>er</sup> ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants :

(1) unité : [unité de sortie] / [unité d'entrée]  
 (2) unité : secondes

$$\tau \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

où :  $K$  est le gain statique du système <sup>(1)</sup>  
 $\tau$  est la constante de temps <sup>(2)</sup>

Si les **conditions initiales sont nulles**, la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit  $(\tau.p + 1).S(p) = K.E(p)$ , soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \tau.p}$$

## Réponse à un échelon

L'entrée est définie par un échelon,  $e(t) = a.u(t)$ , soit dans le domaine de Laplace,  $E(p) = \frac{a}{p}$ .

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{K.a}{p(1 + \tau.p)}$$

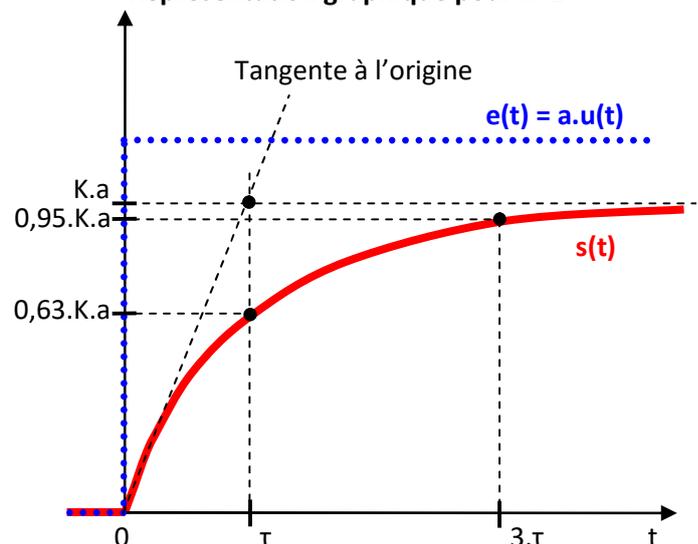
La décomposition en éléments simples donne :

$$S(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{1 + \tau.p} = \frac{K.a}{p} - \frac{K.a.\tau}{1 + \tau.p}$$

La réponse temporelle a donc pour

expression :  $s(t) = K.a. \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) .u(t)$

Représentation graphique pour  $K < 1$



- **Ordonnée en  $+\infty$  de la courbe de sortie  $s(t)$  :**

$$s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.S(p) = K.a \quad \rightarrow \quad s(+\infty) = K.a$$

*Théorème de la valeur finale*

- **Pente à l'origine de la courbe de sortie  $s(t)$  :**

$$s'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.[p.S(p)] = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot \frac{K.a}{p.(1 + \tau.p)} = \frac{K.a}{\tau} \quad \rightarrow \quad \text{Pente à l'origine} = \frac{K.a}{\tau}$$

*Théorème de la valeur initiale*  
*Transformée de la dérivée (CI nulles)*

- **Temps de réponse à 5%,  $t_{5\%}$  :**  $t_{5\%} = 3.\tau$

- **Réponse à  $t = \tau$  :**  $s(\tau) = 0,63.K.a$

Seule la réponse à l'échelon est présentée ici.

# Fiche 07 - Réponse Temporelle Systèmes du 2<sup>nd</sup> Ordre

Un système physique d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** est du 2<sup>nd</sup> ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 2<sup>nd</sup> ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2 \frac{z}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t)$$

où K = gain statique du système <sup>(1)</sup>  
 z = coefficient d'amortissement <sup>(2)</sup>  
 $\omega_0$  = pulsation propre non amortie du système <sup>(3)</sup>

Si les conditions initiales sont nulles, la fonction de transfert dans le domaine de Laplace

s'écrit  $(\frac{1}{\omega_0^2} p^2 + \frac{2z}{\omega_0} p + 1) \cdot S(p) = K \cdot E(p)$ , soit :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2z}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2} = \frac{K \omega_0^2}{p^2 + 2z \omega_0 p + \omega_0^2}$$

<sup>(1)</sup> unité : [unité de sortie] / [unité d'entrée]  
<sup>(2)</sup> z > 0 et sans unité  
<sup>(3)</sup>  $\omega_0 > 0$  en radians/secondes

**Pôles de la Fonction de Transfert :** Le dénominateur  $p^2 + 2z \omega_0 p + \omega_0^2$  de la fonction de transfert peut s'écrire sous la forme  $(p - p_1) \cdot (p - p_2)$ .

• **Cas z > 1 → Δ > 0**

$$p_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = -z \omega_0 \pm \omega_0 \cdot \sqrt{z^2 - 1} \text{ d'où :}$$

$$p^2 + 2z \omega_0 p + \omega_0^2 = (p - p_1)(p - p_2) \text{ avec :}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -z \omega_0 + \omega_0 \cdot \sqrt{z^2 - 1} \\ p_2 &= -z \omega_0 - \omega_0 \cdot \sqrt{z^2 - 1} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ pôles réels} \\ \text{négatifs} \end{array}$$

Remarque :  $p_1 \cdot p_2 = \omega_0^2$

• **Cas z = 1 → Δ = 0**

$$p_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = -\omega_0 \text{ d'où :}$$

$$p^2 + 2z \omega_0 p + \omega_0^2 = (p - p_1)^2 = (p - p_2)^2$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -\omega_0 \\ p_2 &= -\omega_0 \end{aligned} \right\} 2 \text{ pôles réels confondus}$$

• **Cas z < 1 → Δ < 0** → on pose  $\Delta = 4 \cdot \omega_0^2 \cdot j^2 \cdot (1 - z^2)$

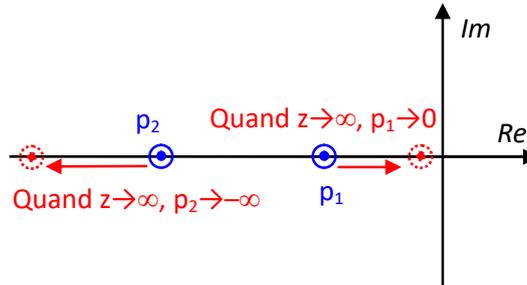
$$p_1 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a} = -z \omega_0 \pm j \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \text{ d'où :}$$

$$p^2 + 2z \omega_0 p + \omega_0^2 = (p - p_1)(p - p_2) \text{ avec :}$$

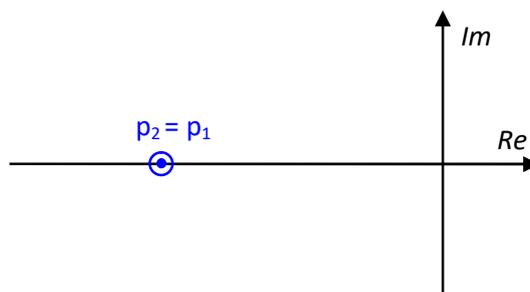
$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -z \omega_0 + j \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \\ p_2 &= -z \omega_0 - j \omega_0 \cdot \sqrt{1 - z^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ pôles} \\ \text{complexes} \\ \text{conjugués} \end{array}$$

$$|p_1| = |p_2| = \sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} = \omega_0$$

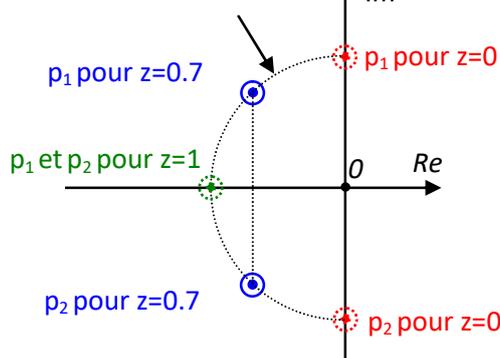
Représentation dans le plan complexe :



Cas particulier : Représentation des pôles correspondant à z infini.



Cercle de centre 0 et de rayon  $\omega_0$



**Réponse à un Echelon :** L'entrée est définie par un échelon  $e(t) = a.u(t)$ , soit dans le domaine de Laplace,  $E(p) = \frac{a}{p}$ .

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :  $S(p) = \frac{a}{p} \cdot \frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2}$

- **Pente à l'origine de la courbe de sortie  $s(t)$  :**

$$s'(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} s'(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot [p.S(p)] = \lim_{p \rightarrow \infty} p^2 \cdot \frac{a}{p} \cdot \frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2} = 0 \rightarrow \text{Pente à l'origine} = 0$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

La tangente à l'origine est une droite horizontale <sup>(4)</sup>

- **Ordonnée en  $+\infty$  de la courbe de sortie  $s(t)$  :**

$$s(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.S(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{K.a.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2} = K.a \rightarrow s(+\infty) = K.a$$

Théorème de la valeur finale

Le régime établi ne dépend que du gain statique  $K$  alors que  $z$  et  $\omega_0$  n'interviennent que sur le régime transitoire

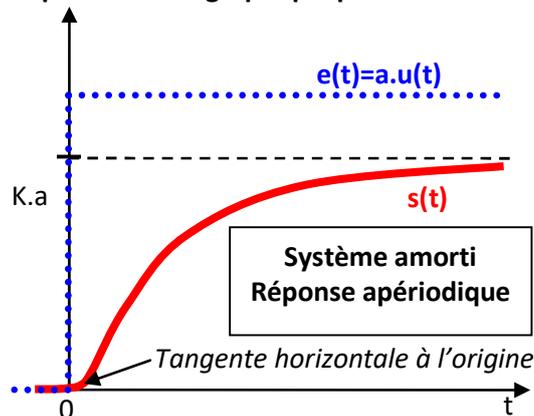
### Réponse à un échelon pour $z > 1$

La réponse temporelle  $s(t)$  a pour expression :

$$s(t) = K.a \cdot \left( 1 + \frac{p_2}{p_1 - p_2} \cdot e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2 - p_1} \cdot e^{p_2 t} \right) \cdot u(t)$$

↑ Régime permanent
← Régime transitoire

### Représentation graphique pour $z > 1$ et $K < 1$



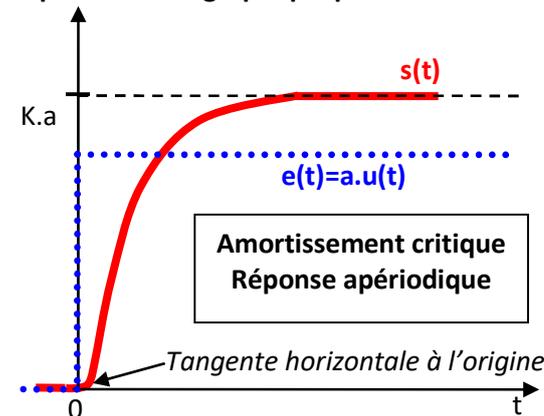
### Réponse à un échelon pour $z = 1$

La réponse temporelle  $s(t)$  a pour expression :

$$s(t) = K.a \cdot \left( 1 - e^{-\omega_0 \cdot t} - \omega_0 \cdot t \cdot e^{-\omega_0 \cdot t} \right) \cdot u(t)$$

↑ Régime permanent
← Régime transitoire

### Représentation graphique pour $z = 1$ et $K > 1$



### Réponse à un échelon pour $z < 1$

La réponse temporelle  $s(t)$  a pour expression :

$$s(t) = K.a \cdot \left( 1 - e^{-z.\omega_0.t} \cdot \cos(\omega_p.t) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}} \cdot e^{-z.\omega_0.t} \cdot \sin(\omega_p.t) \right) \cdot u(t) \text{ avec } \omega_p = \omega_0 \cdot \sqrt{1-z^2}$$

↑ Régime permanent
← Régime transitoire



<sup>(4)</sup> ce qui est différent du système du 1<sup>er</sup> ordre !!



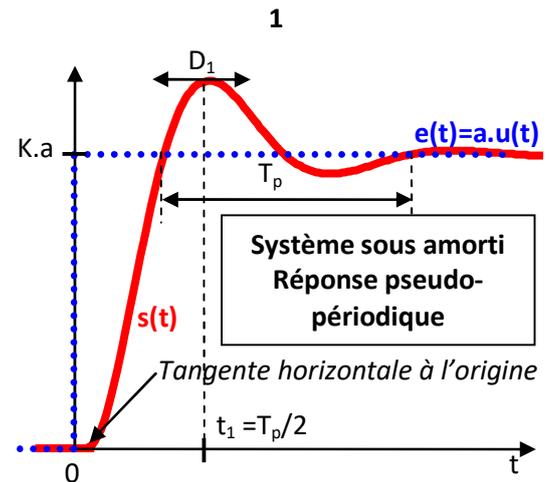


- Pseudo-période :  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-z^2}}$

- 1<sup>er</sup> dépassement :  
Le premier maximum (ou dépassement) apparaît à  $t_1 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$  et a pour expression

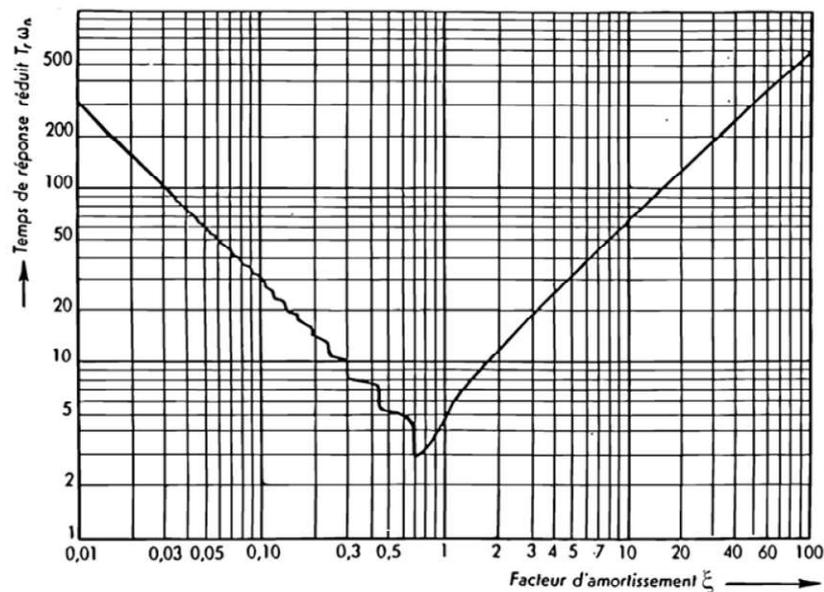
$$D_1 = e^{-\frac{z \cdot \pi}{\sqrt{1-z^2}}}$$

Représentation graphique pour  $z < 1$  et  $K = 1$



### Temps de réponse à 5% et temps de réponse réduit

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement  $z$  et de la pulsation propre non amortie du système  $\omega_0$ . On utilise un abaque qui donne la valeur du temps de réponse réduit  $t_{5\%} \cdot \omega_0$  en fonction du coefficient d'amortissement  $z$ .



Pour une même pulsation propre non amortie  $\omega_0$  et :

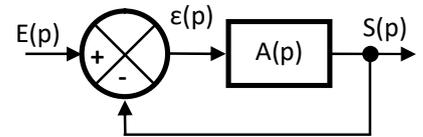
- pour  $z \ll 1$  (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand.
- pour  $z=0.7$ , le système présente un **dépassement D faible ( $D_1 = 5\%$ ) avec le temps de réponse le plus faible.**
- pour  $z=1$ , le système présente le **temps de réponse le plus faible pour une réponse sans dépassement.**
- pour  $z \gg 1$ , il n'y a pas de dépassement mais le système est hyper amorti donc le temps de réponse est très grand.

**Pour un même coefficient d'amortissement  $z$ , plus  $\omega_0$  augmente plus le temps de réponse à 5% diminue, donc plus le système est rapide.**

# Fiche 08 - Compléments sur les Réponses Temporelles

## Influence du Bouclage

Un système asservi peut toujours être mis sous la forme d'un système à retour unitaire si l'entrée  $E(p)$  et la sortie  $S(p)$  sont comparables (même dimension). L'avantage pratique du bouclage est qu'il permet de modifier facilement les caractéristiques du système.



$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)} = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 1<sup>er</sup> ordre permet de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 1<sup>er</sup> ordre, **de diminuer la valeur de la constante de temps  $\tau_{BF}$  du système, ce qui permet d'obtenir un temps de réponse plus faible lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO**

## Bouclage d'un système du 1<sup>er</sup> ordre

Dans le cas d'un système du 1<sup>er</sup> ordre  $A(p) = \frac{K}{1 + \tau.p}$ . Après bouclage on obtient :

$$H(p) = \frac{\frac{K}{1 + \tau.p}}{1 + \frac{K}{1 + \tau.p}} = \frac{K}{1 + \tau.p + K} = \frac{K}{1 + K} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\tau}{1 + K}.p} = \frac{K_{BF}}{1 + \tau_{BF}.p} \text{ avec : } K_{BF} = \frac{K}{1 + K} \text{ et } \tau_{BF} = \frac{\tau}{1 + K}$$

## Bouclage d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre

Dans le cas d'un système du 2<sup>ème</sup> ordre  $A(p) = \frac{K}{1 + \frac{2.z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2}$ . Après bouclage on obtient :

$$H(p) = \frac{FTBO}{1 + FTBO} = \frac{K}{1 + \frac{2.z}{\omega_0}p + \frac{1}{\omega_0^2}p^2 + K} = \frac{\frac{K}{1 + K}}{1 + \frac{2.z}{(1 + K).\omega_0}p + \frac{1}{(1 + K).\omega_0^2}p^2} = \frac{K_{BF}}{1 + \frac{2.z_{BF}}{\omega_{BF0}}p + \frac{1}{\omega_{BF0}^2}p^2}$$

avec :  $K_{BF} = \frac{K}{1 + K}$   $\frac{1}{\omega_{BF0}^2} = \frac{1}{(1 + K).\omega_0^2} \rightarrow \omega_{BF0} = \sqrt{(1 + K)}.\omega_0$

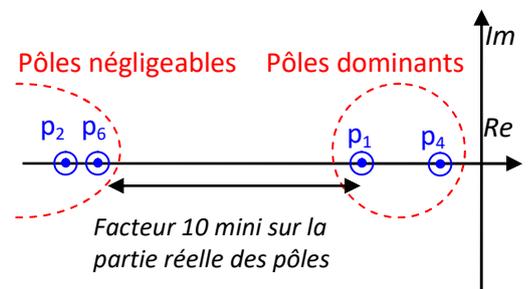
$\frac{2.z_{BF}}{\omega_{BF0}} = \frac{2.z}{(1 + K).\omega_0} \rightarrow z_{BF} = \frac{z.\sqrt{(1 + K)}.\omega_0}{(1 + K).\omega_0} \rightarrow z_{BF} = \frac{z}{\sqrt{(1 + K)}}$

Le bouclage d'un système ayant une FTBO du 2<sup>ème</sup> ordre permet de conserver l'ordre du système en obtenant une FTBF du 2<sup>ème</sup> ordre, **augmente la valeur de la pulsation propre du système lorsque l'on augmente le gain K de la FTBO, diminue la valeur du coefficient d'amortissement  $z_{BF}$  lorsque l'on augmente le gain K.**

## Notion de pôles dominants

La réponse  $s(t)$  d'un SLCI dépend des pôles de sa Fonction de Transfert Boucle Fermée (racines du dénominateur de la FTBF).

Plus un pôle aura une partie réelle grande et plus il influencera la réponse globale du système. Au contraire, plus un pôle aura une partie réelle petite et plus il sera rapidement amorti et influencera peu la réponse globale du système.



Par conséquent, lorsque l'on étudie un système, on peut se contenter de ne prendre en compte que les pôles dominants qui permettent d'obtenir un modèle mathématique plus simple à manipuler qui reflète les caractéristiques principales du système.

Le dénominateur doit être sous forme canonique avant d'effectuer la simplification !!

