

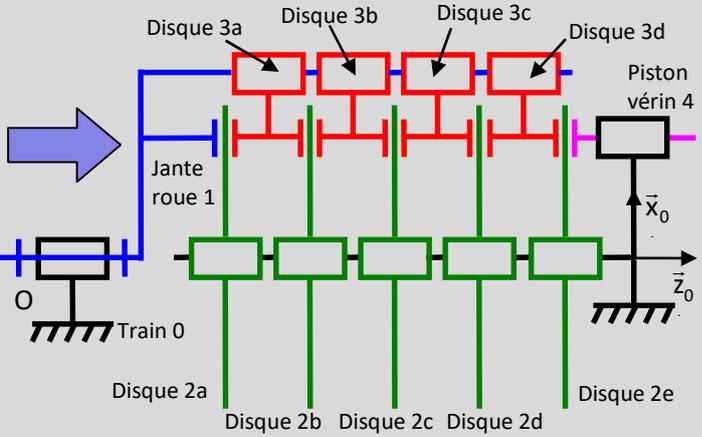
Modélisation des Actions Mécaniques de Contact avec prise en Compte du Frottement - Modèle de Coulomb

Système réel



Bloc de freinage

Modèle



On s'intéresse au système de freinage du train avant d'un Airbus A320. Ce système permet, par contact avec frottement entre des disques et des garnitures, de ralentir puis stopper le mouvement de l'avion. Les gros avions possèdent des freins à disques mais au lieu d'avoir, comme sur la voiture ou la moto, un seul disque que pince une paire de garnitures, on a un empilement de plusieurs couches disque/garnitures/disque/garnitures qui forment un gros bloc. De nos jours, on fabrique des disques de freins en carbone plus légers et plus endurants que les disques en acier. Lorsque la roue est en place, on peut mesurer d'un coup d'œil l'usure du bloc de frein, au moyen d'une pige (cadre rouge sur la photo de gauche) qui est visible à l'intérieur du train. Autour de cette pige, on distingue bien les pistons de frein, qui poussent vers l'extérieur, serrant ainsi les disques et les couches de garnitures les uns sur les autres.

Exemple de système
BLOC DE FREINAGE AIRBUS A320

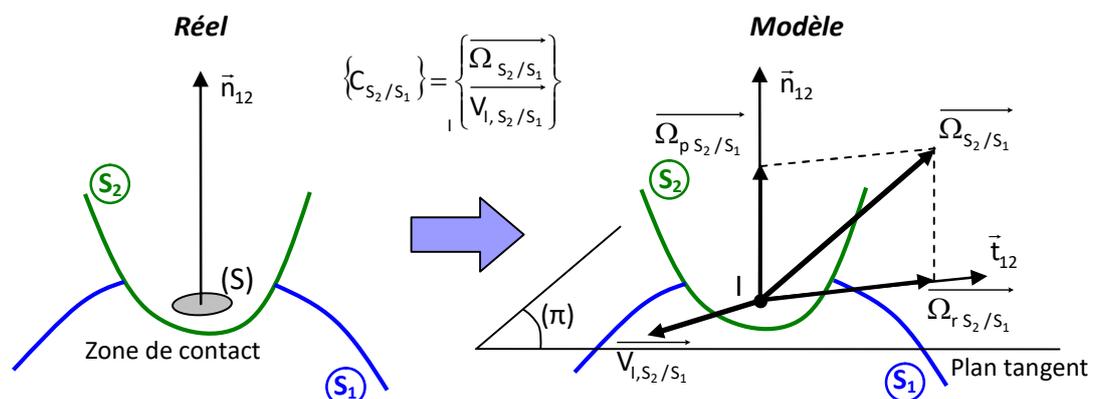
Le modèle liaison parfaite est une modélisation simplifiée des actions mécaniques de contact entre solides. Cette modélisation est souvent suffisante pour les problèmes de statique mais il ne tient pas compte du frottement. Lorsque l'on souhaite tenir compte du frottement entre deux solides il est donc nécessaire de proposer un nouveau modèle. L'objet de ce cours est de notamment mettre en place le modèle de Coulomb qui, dans bon nombre de cas, est acceptable pour étudier le frottement entre deux solides en contact.

1 - RAPPELS

⁽¹⁾ Rappel issu du Cours 16.

1.1. Rappel 1 - Cinématique du contact ponctuel ⁽¹⁾

On considère un solide S_2 en mouvement relatif et en contact par rapport à un solide S_1 .



On définit un point de contact I, une normale au contact \vec{n}_{12} et un plan tangent au contact (π) entre les deux solides (S_1 est en dessous de (π), S_2 est au dessus de (π)).

Au cours du mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 , on suppose qu'il existe toujours un point de contact (non rupture du contact).

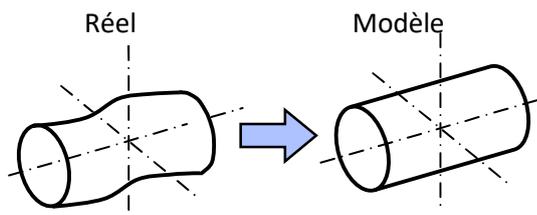
Le mouvement relatif de S_2 par rapport à S_1 peut être caractérisé cinématiquement par le torseur $\{C_{S_2/S_1}\}$ exprimé au point I : $\{C_{S_2/S_1}\}_I = \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \\ \vec{V}_{I,S_2/S_1} \end{matrix} \right\}$

On appelle le vecteur vitesse de glissement en I de S_2/S_1 , le vecteur vitesse $\vec{V}_{I,S_2/S_1}$ (qui est nécessairement contenu dans le plan (π)) et on considère que le vecteur $\vec{\Omega}_{S_2/S_1}$ peut se décomposer en la somme de deux vecteurs : $\vec{\Omega}_{p\ S_2/S_1}$, vecteur vitesse de rotation de pivotement de S_2/S_1 normal au plan (π) et $\vec{\Omega}_{r\ S_2/S_1}$, vecteur vitesse de rotation de roulement de S_2/S_1 contenu dans le plan (π).

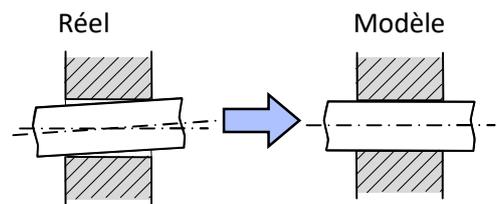
1.2. Rappel 2 - Modèle liaison parfaite ⁽²⁾

Les modèles d'actions mécaniques de contact pour les liaisons normalisées sous forme de torseur d'action mécanique transmissible sont basées sur le modèle de la liaison parfaite :

Hypothèse 1 : géométrie parfaite



Hypothèse 2 : liaison sans jeu



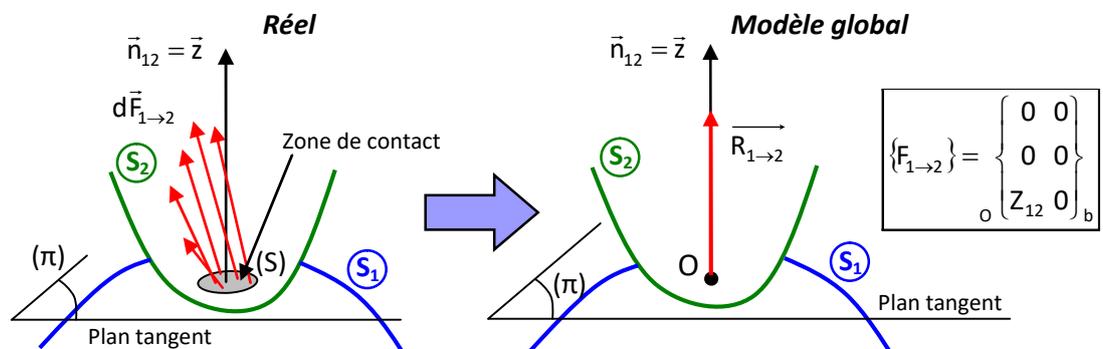
Hypothèse 3 : déformations nulles

Hypothèse 4 : pas de frottement

1.3. Rappel 3 - Modèle et torseur d'action mécanique transmissible de la liaison ponctuelle parfaite ⁽³⁾

Si la liaison peut être considérée comme parfaite, on définit alors le modèle global suivant :

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en O de normale (O, \vec{z}) entre les solide S_2 et S_1 .



2 - LOIS DU FROTTEMENT DE GLISSEMENT (LOIS DE COULOMB)

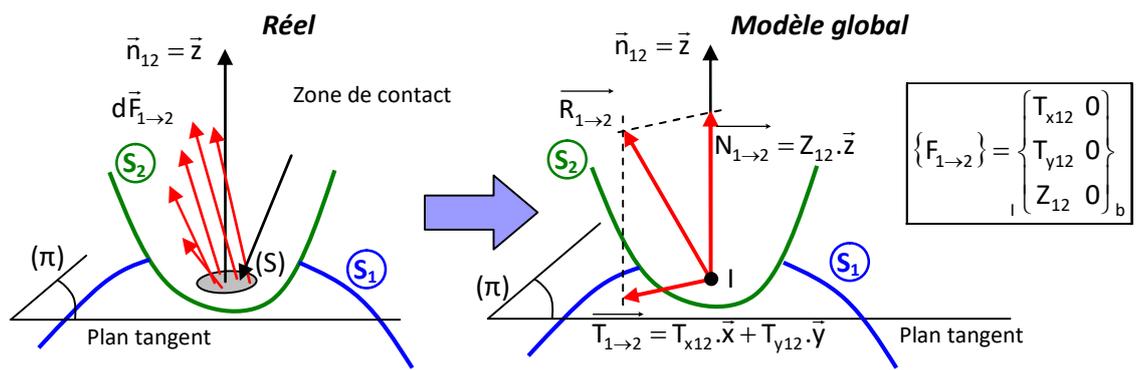
Si le frottement n'est pas négligeable, il existe une composante tangentielle à l'action mécanique.

⁽²⁾ Rappel issu des cours 9 et 21.

⁽³⁾ Rappel issu du cours 21.

Sur les figures ci-contre on a évidemment $\vec{n}_{12} = -\vec{n}_{21}$. Par conséquent si on isole le solide 2 la normale au contact \vec{n}_{21} du solide 2 est suivant $-\vec{z}$ et si on isole le solide 1 la normale au contact \vec{n}_{12} du solide 1 est suivant $+\vec{z}$.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en I de normale (I, \vec{z}) avec frottement entre les solide S_2 et S_1 :



Les lois (expérimentales) de Coulomb permettent de relier les composantes de $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ à la composante normale Z_{12} . Il existe deux cas de figure :

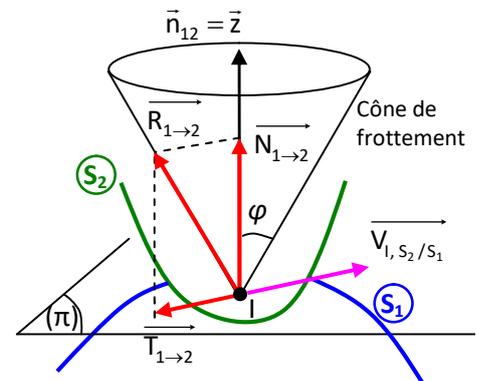
1^{ère} loi de Coulomb :

Glissement en I $\rightarrow \vec{V}_{I, S_2/S_1} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de frottement f tel que $f = \tan \varphi$ où φ est le demi angle au sommet du cône de frottement.

- La composante tangentielle $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{I, S_2/S_1}$.
- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est toujours sur le cône de frottement.
- On connaît exactement $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| : \|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| = f \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$

1^{er} modèle de Coulomb



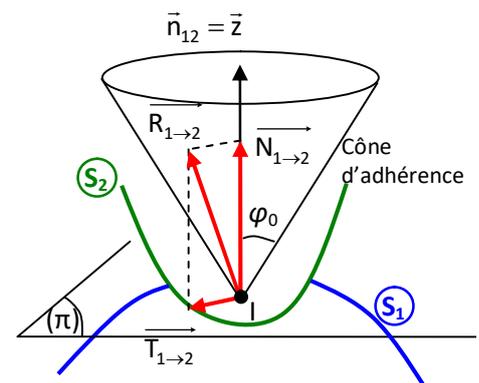
2^{ème} loi de Coulomb :

Non glissement en I $\rightarrow \vec{V}_{I, S_2/S_1} = \vec{0}$

On définit un coefficient d'adhérence f_0 tel que $f_0 = \tan \varphi_0$ où φ_0 est le demi angle au sommet du cône d'adhérence.

- $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est toujours dans le cône d'adhérence.
- On ne connaît pas exactement $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| :$
 $\|\vec{T}_{1 \rightarrow 2}\| \leq f_0 \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$

2^{ème} modèle de Coulomb



Attention aux indices pour la 1^{ère} loi de Coulomb. La composante tangentielle $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ (1 \rightarrow 2) est opposée à la vitesse de glissement $\vec{V}_{I, S_2/S_1}$ (2/1).



Sur les figures ci-contre on a évidemment toujours $\vec{n}_{12} = -\vec{n}_{21}$. Par conséquent comme on isole ici le solide 2 la normale au contact \vec{n}_{21} du solide 2 est suivant $-\vec{z}$.





Le coefficient de frottement f est en général inférieur au coefficient d'adhérence f_0 ($f_0 \geq f$) mais dans la pratique, les 2 coefficients ayant des valeurs proches, on confond f et f_0 et on utilise uniquement le coefficient de frottement f .



Expérimentalement, on constate que **le coefficient de frottement f dépend de la nature de surfaces de contact** (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...).



En première approximation, on considère que le facteur prépondérant du coefficient de frottement concerne uniquement la nature des matériaux en contact.

Matériaux en contact	Coefficient de frottement
Acier sur acier	De 0,1 à 0,2
Acier sur bronze	De 0,12 à 0,2
Acier sur PTFE	De 0,02 à 0,08
Acier sur garniture de friction	De 0,25 à 0,4
Pneu neuf sur chaussée	De 0,3 à 0,6



Le coefficient de frottement f est un coefficient adimensionnel qui ne dépend pas de l'effort normal appliqué !!!

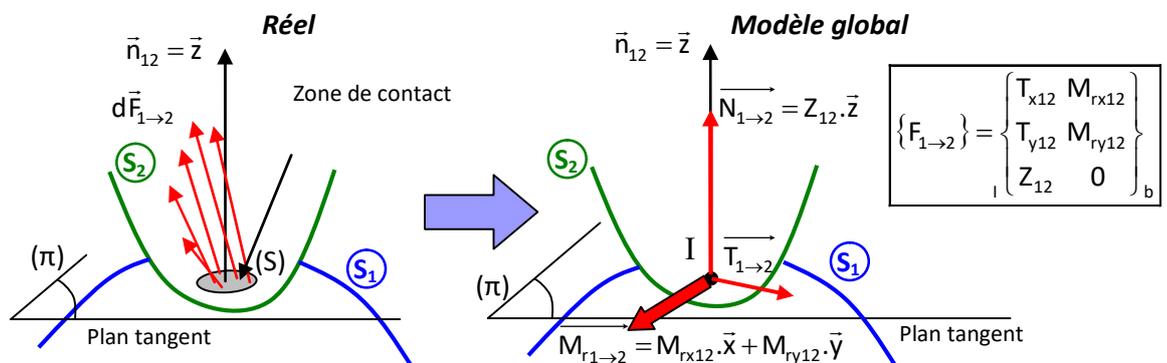


Pour étudier l'équilibre d'un solide lorsque celui-ci adhère (non glissement en I), on peut se placer à la limite du glissement (c'est-à-dire dans l'hypothèse limite où le solide commence à glisser). Il n'y a donc pas encore de mouvement relatif mais on peut appliquer la première loi de Coulomb. Se placer à la limite du glissement revient donc à considérer que $\vec{R}_{1 \rightarrow 2}$ est sur le cône de frottement.

3 - LOIS DU FROTTEMENT DE ROULEMENT ET DE PIVOTEMENT

Si le roulement n'est pas négligeable, il existe deux composantes de moment dans le plan tangent.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en I de normale (I, \vec{z}) avec frottement et roulement entre les solide S_2 et S_1 :

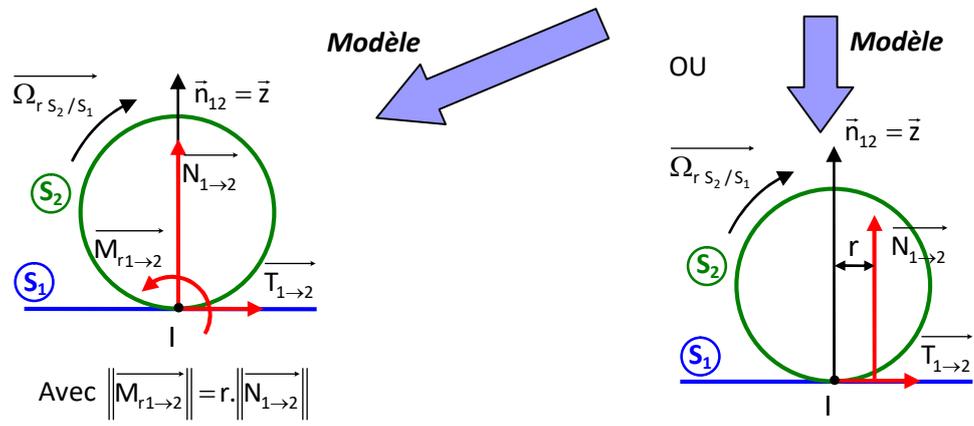
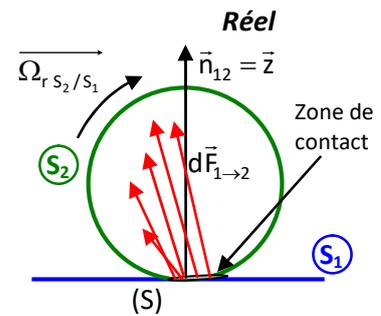


Des lois (expérimentales) permettent de relier les composantes de $\vec{M}_{r1 \rightarrow 2}$ à la composante normale Z_{12} de l'action mécanique.

Roulement en I : $\vec{\Omega}_{r_{S_2/S_1}} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de résistance au roulement r .

- $\|\vec{M}_{r_{1 \rightarrow 2}}\| = r \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$
- $\vec{M}_{r_{1 \rightarrow 2}}$ s'oppose à $\vec{\Omega}_{r_{S_2/S_1}}$.



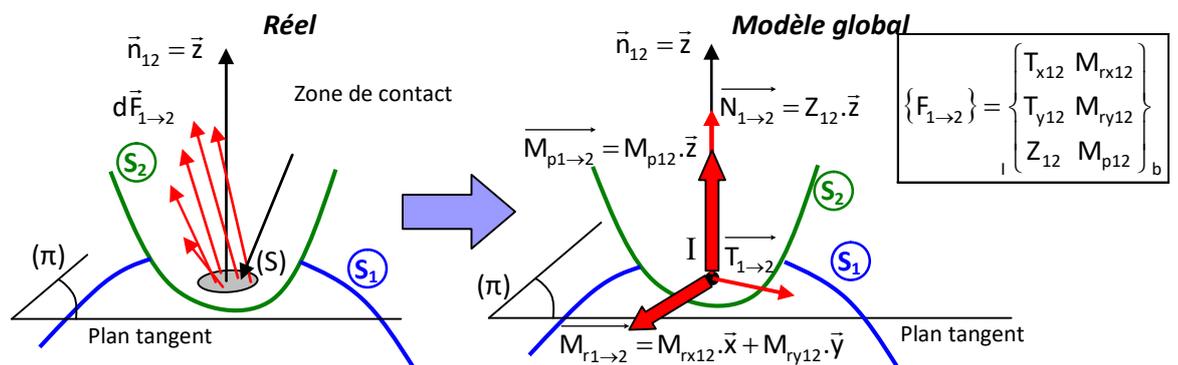
Le frottement de roulement est dû à la déformation des surfaces en contact. Expérimentalement, on constate que le coefficient de résistance au roulement r **dépend de la nature de surfaces de contact** (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...).



Le coefficient de résistance au roulement r est homogène à une longueur !!!

Si le pivotement n'est pas négligeable, il existe une composante de moment normale au plan tangent.

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en I de normale (I, \vec{z}) avec frottement, roulement et pivotement entre les solide S_2 et S_1 :

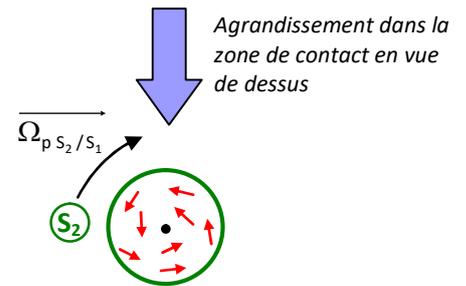
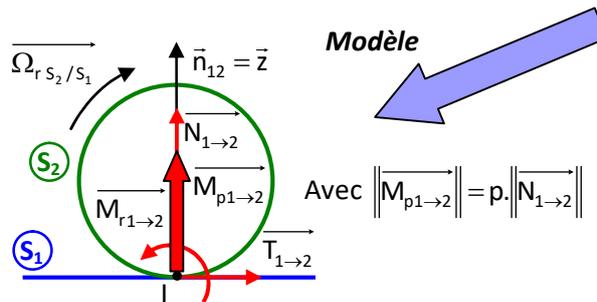
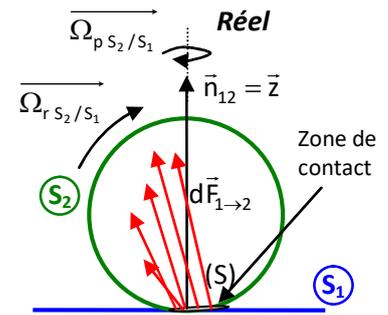


Des lois (expérimentales) permettent de relier la composante de $\vec{M}_{p_{1 \rightarrow 2}}$ à la composante normale Z_{12} de l'action mécanique.

Pivotement en I : $\vec{\Omega}_{p S_2 / S_1} \neq \vec{0}$

On définit un coefficient de résistance au pivotement p.

- $\|\vec{M}_{p1 \rightarrow 2}\| = p \cdot \|\vec{N}_{1 \rightarrow 2}\|$
- $\vec{M}_{p1 \rightarrow 2}$ s'oppose à $\vec{\Omega}_{p S_2 / S_1}$.



Le frottement de roulement est dû à la déformation des surfaces en contact. Expérimentalement, on constate que le coefficient de résistance au pivotement p **dépend de la nature de surfaces de contact** (matériaux en contact, état de la surface de contact, présence ou non de lubrifiant,...).



Le coefficient de résistance au pivotement p est homogène à une longueur !!!

4 - UTILISATION DES LOIS DE COULOMB DANS LE CAS DE CONTACTS SURFACIQUES

Les lois de Coulomb concernant le frottement de glissement ne sont valables que pour un contact ponctuel. Or on constate que très souvent le contact entre deux solides n'est pas ponctuel et s'effectue sur une surface entière. Pour déterminer les actions mécaniques de contact dans ce cas de figure, on considère alors de petites zones « quasi ponctuelles » autour de chaque point de la zone de contact et on écrit les lois de Coulomb sur des densités surfaciques d'effort.

4.1. Définition du modèle local avec frottement

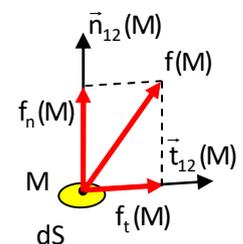
On définit l'action mécanique élémentaire de l'élément de surface $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{f}(M) \cdot dS$ avec $\vec{f}(M) = f_n(M) \cdot \vec{n}_{12}(M) + f_t(M) \cdot \vec{t}_{12}(M)$ où :

$f_n(M)$: densité surfacique normale d'effort en M ($f_n(M) = -p(M)$ dans le cas de pression de contact sur une surface)

$\vec{n}_{12}(M)$: vecteur unitaire normal au plan tangent de la surface

$f_t(M)$: densité surfacique tangentielle d'effort en M

$\vec{t}_{12}(M)$: vecteur unitaire d'une direction du plan tangent de la surface



On applique ensuite les lois de Coulomb sur l'action mécanique élémentaire et on considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface étudiée. La répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.

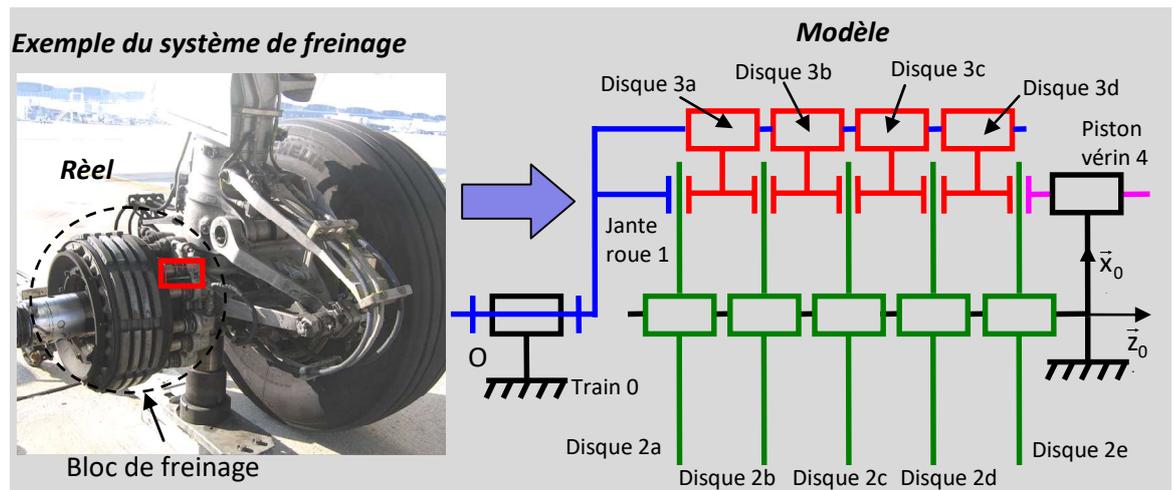


Les lois de Coulomb pour le modèle local sont les mêmes que celles présentée pour le contact ponctuel mais elles portent cette fois-ci sur les densités d'effort.

4.2. Définition du modèle global avec frottement

On note $\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A(1 \rightarrow 2)} \end{Bmatrix}$ l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface S. Le

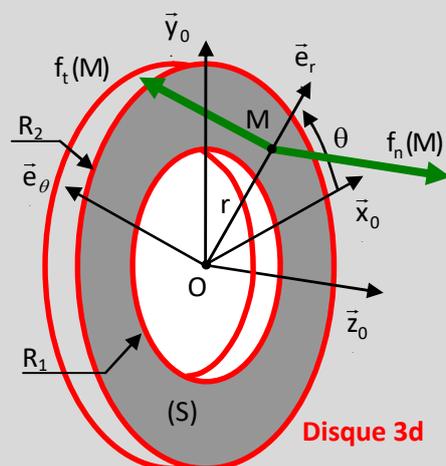
modèle global est obtenu à partir du modèle local : $\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_{(S)} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A(1 \rightarrow 2)} = \int_{(S)} \vec{AM} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{Bmatrix}$



Le Bloc de freinage est doté de 9 disques en carbone, 5 en liaison glissière d'axe $(0, \vec{z}_0)$ par rapport au train repéré 0 (disques 2) et 4 en liaison glissière d'axe \vec{z}_0 par rapport à la jante de la roue repéré 1 (disques 3). Pour mettre en contact ces disques et par conséquent freiner la jante de la roue 1, un dispositif hydraulique constitué de 14 vérins équi-répartis, dont le vérin 4, permet d'exercer une action mécanique sur le disque 2e définie par le torseur suivant :

$$\{F_{\text{vérins} \rightarrow 2e}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\text{vérins} \rightarrow 2e} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ où } F_0 = 10^6 \text{ N}$$

Cette action mécanique est intégralement transmise au disque 3d (et de proche en proche à tous les autres disques) et elle génère grâce au frottement un moment permettant d'immobiliser petit à petit le disque 3d par rapport au disque 2e. Par conséquent on a :



$$\{F_{2e \rightarrow 3d}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{O(2e \rightarrow 3d)} = M_0 \cdot \vec{z}_0 \end{Bmatrix}$$

Objectif d'étude : Déterminer la relation entre l'effort presseur F_0 exercé par le dispositif hydraulique sur le disque 2e et le moment de freinage global M_{global} exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue.

Compte tenu de la géométrie de la surface de contact (S) entre 2e et 3d on utilise les coordonnées polaires pour paramétrer cette surface.

Données : $R_2 = 300 \text{ mm}$; $R_1 = 200 \text{ mm}$; $f = 0,5$

1. Définition de l'action mécanique élémentaire et du modèle local :

Par définition : $d\vec{F}_{2e \rightarrow 3d} = [f_n(M) \cdot \vec{n}_{2e3d}(M) + f_t(M) \cdot \vec{t}_{2e3d}(M)] dS$

- On suppose que la pression de contact de 2e sur 3d est uniforme soit $f_n(M) = -p(M) = -p_0$
- Le vecteur normal au plan tangent commun à 2e et 3d sortant de la matière de 3d est \vec{z}_0 soit $\vec{n}_{2e3d}(M) = \vec{z}_0$

- Il y a du glissement en M entre 3d et 2e et puisque l'on calcule les efforts de 2e sur 3d, on a donc $\vec{t}_{2e3d}(M) = -\frac{\vec{V}_{M,3d/2e}}{\|\vec{V}_{M,3d/2e}\|}$ avec $\vec{V}_{M,3d/2e} = \vec{V}_{M,1/0}$ si 3d est solidaire de la jante 1 et 2e du train 0.

$$\vec{V}_{M,3d/2e} = \vec{V}_{M,1/0} = \vec{V}_{O,1/0} + \vec{MO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -r \cdot \vec{e}_r \wedge \dot{\theta}_{10} \cdot \vec{z}_0 = r \cdot \dot{\theta}_{10} \cdot \vec{e}_\theta \text{ soit } \vec{t}(M) = -\vec{e}_\theta \text{ si } \dot{\theta}_{10} > 0$$

- L'existence du glissement induit que $f_t(M)$ est sur le cône de frottement soit $f_t(M) = f \cdot f_n(M)$

Finalement l'action mécanique élémentaire s'écrit : $d\vec{F}_{2e \rightarrow 3d} = (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS$

2. Définition du modèle global : On intègre le modèle local sur la surface (S) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = \int_{(S)} (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS \\ \vec{M}_{O(2e \rightarrow 3d)} = \int_{(S)} \vec{OM} \wedge (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS \end{array} \right.$$

$$\vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = \int_{(S)} (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS \text{ avec } dS = r \cdot dr \cdot d\theta \text{ et } \vec{e}_\theta = -\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta \cdot \vec{y}_0$$

$$\vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = -p_0 \cdot \int_{(S)} r \cdot dr \cdot d\theta \cdot \vec{z}_0 + p_0 \cdot f \cdot \int_{(S)} r \cdot dr \cdot d\theta \cdot (-\sin\theta \cdot \vec{x}_0 + \cos\theta \cdot \vec{y}_0) = -p_0 \cdot \vec{z}_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{R_1}^{R_2} r \cdot dr + \vec{0}$$

$$\vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = -p_0 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \frac{R_2^2 - R_1^2}{2} \cdot \vec{z}_0 = -p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \vec{z}_0 \quad \text{Soit : } \boxed{\vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = -p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \vec{z}_0}$$

$$\vec{M}_{O(2e \rightarrow 3d)} = \int_{(S)} \vec{OM} \wedge (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS = \int_{(S)} r \cdot \vec{e}_r \wedge (-p_0 \cdot \vec{z}_0 + f \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta) \cdot dS = \int_{(S)} (r \cdot p_0 \cdot \vec{e}_\theta + f \cdot r \cdot p_0 \cdot \vec{z}_0) \cdot dS$$

$$\vec{M}_{O(2e \rightarrow 3d)} = p_0 \cdot \int_0^{2\pi} \vec{e}_\theta \cdot d\theta \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr + f \cdot p_0 \cdot \vec{z}_0 \cdot \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_{R_1}^{R_2} r^2 \cdot dr = \vec{0} + \frac{2}{3} \cdot f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3) \cdot \vec{z}_0$$

$$\text{Soit : } \boxed{\vec{M}_{O(2e \rightarrow 3d)} = \frac{2}{3} \cdot f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3) \cdot \vec{z}_0}$$

$$\text{Sachant que } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{2e \rightarrow 3d} = -F_0 \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{M}_{O(2e \rightarrow 3d)} = M_0 \cdot \vec{z}_0 \end{array} \right\} \text{ et } F_0 = p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^2 - R_1^2) \text{ et } M_0 = \frac{2}{3} \cdot f \cdot p_0 \cdot \pi \cdot (R_2^3 - R_1^3)$$

$$\text{On a } p_0 = \frac{F_0}{\pi \cdot (R_2^2 - R_1^2)} \text{ et on obtient : } \boxed{M_0 = \frac{2}{3} \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$$

Le moment de freinage global M_{global} exercé par le bloc de freinage sur la jante de la roue correspond au moment M_0 multiplié par le nombre de surfaces en contact entre les disques (9 sur le bloc de l'A320).

$$M_{global} = 9 \cdot M_0 \text{ soit : } \boxed{M_{global} = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot f \cdot F_0 \cdot \frac{(R_2^3 - R_1^3)}{(R_2^2 - R_1^2)}}$$