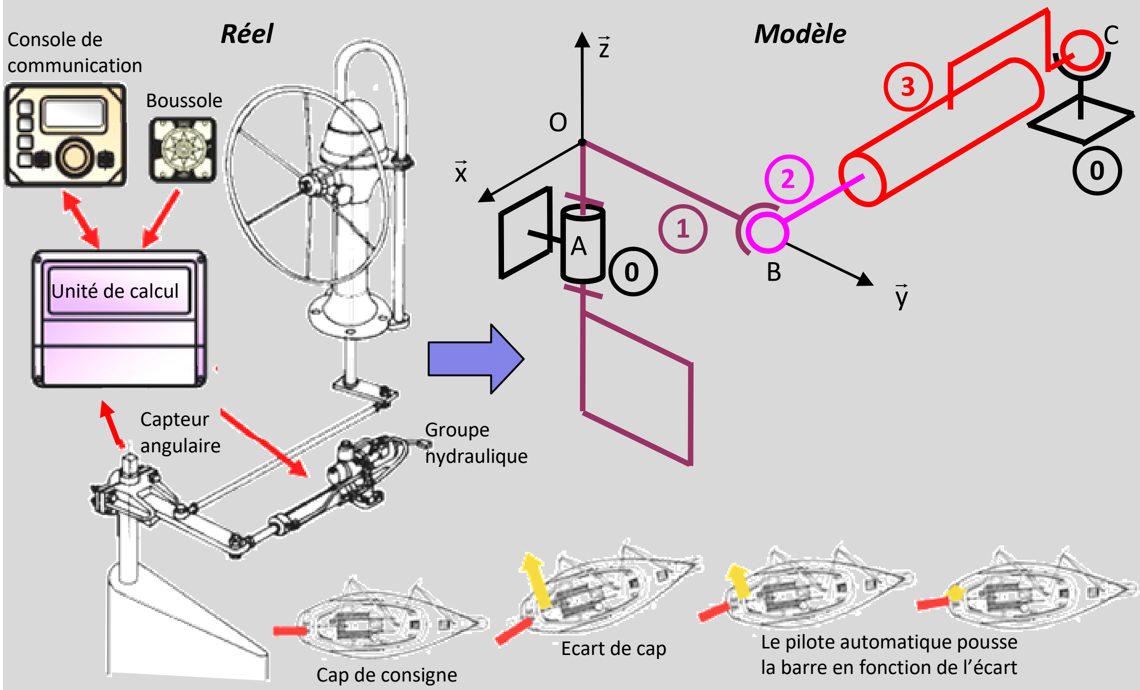
Résolution Analytique des Problèmes de Statique



On s'intéresse à un pilote automatique de voilier qui permet d'ajuster automatiquement le cap d'un bateau sans l'intervention du marin. L'ensemble gouvernail barre franche, repéré 1, est en liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ par rapport au voilier repéré 0. Lorsque le pilotage est automatique, l'ensemble gouvernail barre franche est actionné par un vérin linéaire repéré (2+3).

Exemple de système

PILOTE AUTOMATIQUE DE BATEAU

La statique étudie la relation de cause à effet entre l'équilibre relatif d'un système matériel et les actions mécaniques auxquelles ce système est soumis. L'objectif des problèmes de statique, rencontrés en MPSI-MP-PSI, est de déterminer (à partir des actions mécaniques connues) les actions mécaniques inconnues qui agissent sur le système pour dimensionner, par la suite, les éléments constituants les liaisons (palier lisses, roulements, …) ou les actionneurs (moteurs, vérins, …)

1 - SCHEMA D'ARCHITECTURE ET GRAPHE DE STRUCTURE

[1] Voir cours 09

Le **schéma cinématique minimal** [1] utilisé jusqu'à présent et que l'on construit en parallèle d'un **graphe des liaisons** [1]**,** est un outil qui permet de modéliser un système réel dans le but de réaliser des **études cinématiques**. Il permet de visualiser les mouvements relatifs des différentes classes d'équivalence cinématique d'un mécanisme et ne tient pas compte de l'agencement des composants technologiques utilisés pour réaliser les différentes liaisons du mécanisme.

Un des objectifs des **problèmes de statique** étant de dimensionner les composants technologiques constituant les liaisons, l'outil schéma cinématique n'est donc pas adapté pour ces problèmes. On utilise par conséquent le **schéma d'architecture** qui permet de visualiser l'architecture d'un système et qui tient compte des composants technologiques. Il est construit en parallèle d'un **graphe de structure**.

Exemple du pilote automatique de bateau :
La liaison pivot d'axe $(A, \vec{z})$ entre l'ensemble gouvernail - barre franche (1) et la coque du voilier

(0) est un modèle adapté pour une étude cinématique. Il traduit le mouvement de 1/0 observé sur le système réel. Dans le cas d'une étude statique il faut tenir compte des composants technologiques utilisés pour réaliser cette liaison. En l'occurrence on utilise deux roulements à billes à contact radial ayant pour centre de poussée respectifs les points A_1 et A_2 éloignés d'une distance L. On choisit donc de modéliser ces composants technologiques par une liaison rotule de centre A_1 et une liaison linéaire annulaire en A_2 d'axe $(A_2, \vec{z})$, ce qui permettra de déterminer les actions mécaniques sur chacun des centres de poussée des roulements A_1 et A_2.

Schéma cinématique minimal

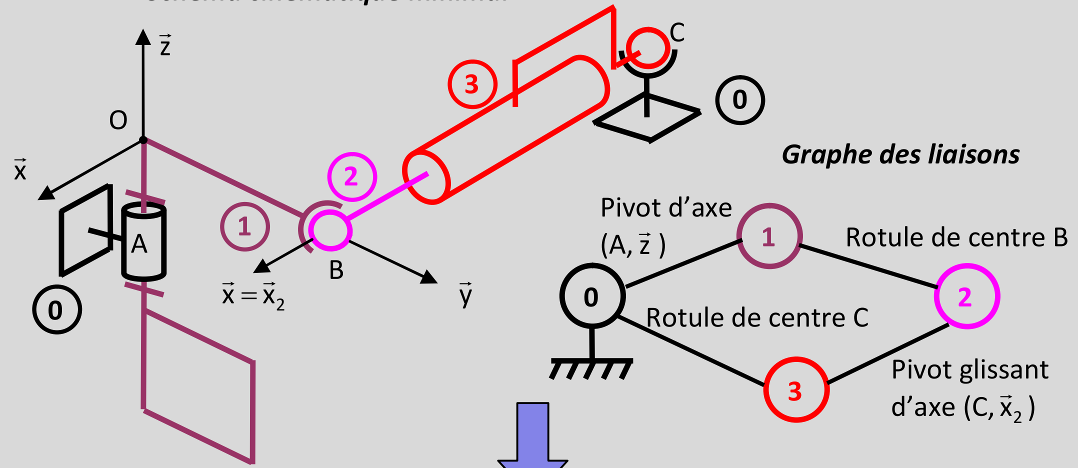
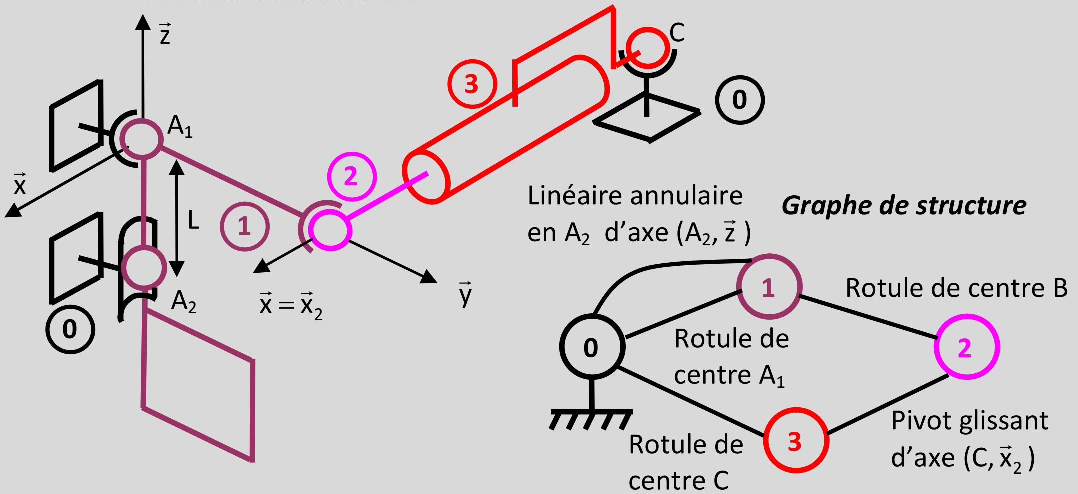


Schéma d'architecture



Le schéma d'architecture est aussi un modèle mais il s'approche davantage du système réel en tenant compte des solutions technologiques utilisées pour réaliser les liaisons.

2 - Bilan d'Actions Mecaniques, Isolement d'un Systeme Materiel et Graphe d'Analyse

Deux préalables à toute étude statique sont le bilan des actions mécaniques et l'isolement d'un système matériel à étudier E :

- L'isolement consiste à définir une **frontière fictive** qui englobe tout le système isolé E que l'on cherche à étudier. Cette frontière fictive permet d'identifier un **milieu intérieur** au système isolé et un **milieu extérieur** $\bar{E}$ au système isolé.
- Le **bilan des actions mécaniques** consiste à répertorier toutes les actions mécaniques qui sont susceptibles d'intervenir dans un problème [2].

[2] On réalise un bilan des actions mécaniques après chaque isolement.

Le système matériel isolé E peut être un solide, une portion de solide, un ensemble de solides, le mécanisme entier, …

Lorsque l'on réalise un isolement d'un système E il ne faut jamais isoler le bâti seul ou inclure le bâti dans le système E. **Bref On n'isole JAMAIS le bâti !!!**

On définit des **actions mécaniques extérieures** qui correspondent à toutes les actions mécaniques **exercées par le milieu extérieur** [3] qui agissent **SUR** un **élément du système isolé**.

[3] solide, fluide, ressort, pesanteur, …

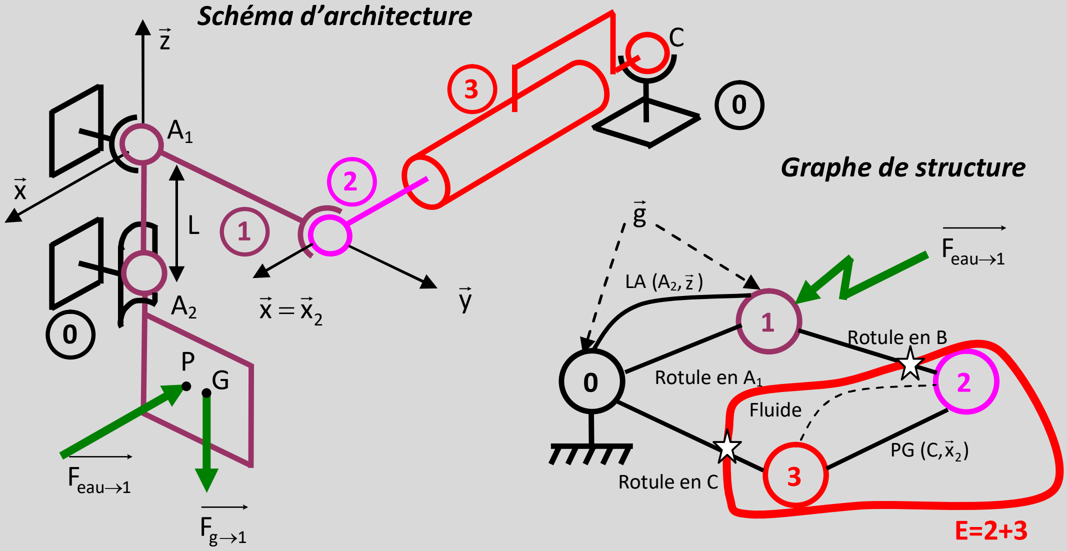
On définit des **actions mécaniques intérieures** qui correspondent à toutes les actions mécaniques exercées par un **élément appartenant au système isolé** [4] qui agissent **SUR** un **élément du système isolé**.

[4] solide, fluide, ressort, …

Les actions mécaniques intérieures au système isolé E ne sont jamais prises en compte lors de l'écriture du principe fondamental de la statique !

Dans la pratique on ajoute toutes les actions mécaniques extérieures et certaines actions mécaniques intérieures agissant sur le système sur le graphe de structure : il est alors appelé **graphe d'analyse**. On peut aussi ajouter les actions mécaniques extérieures sur le schéma d'architecture pour mieux appréhender le problème.

Exemple du pilote automatique :



On réalise dans un 1er temps le bilan complet des actions mécaniques agissant sur le pilote automatique. On ajoute ces données sur le graphe d'analyse et éventuellement sur le schéma d'architecture :

- *L'eau exerce une action mécanique sur le gouvernail modélisée globalement par une force $\overrightarrow{F_{eau\to1}} = -F.\vec{x}$ en P.*
- *Le fluide exerce une action mécanique sur le corps du vérin 3 ainsi que sur la tige du vérin 2, on la note en utilisant un train pointillé et en indiquant fluide sur le graphe d'analyse.*
- *Seuls les ensembles 0 et 1 sont soumis à l'action mécanique de la pesanteur $\vec{g}$ (Hypothèse : on néglige cette AM sur les solides 2 et 3), on la note en entourant d'un train fin pointillé tous les éléments concernés.*

On peut ensuite décider d'isoler par exemple le système matériel E=2+3 et on entoure sur le graphe d'analyse cet ensemble 2+3 :

- *L'ensemble 2+3 fait donc parti du milieu intérieur au système isolé puisqu'il est à l'intérieur de la frontière d'isolement alors que 1 et 0 font parti du milieu extérieur au système isolé puisqu'ils sont à l'extérieur de la frontière d'isolement.*
- *L'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 (liaison rotule de centre B), l'action mécanique du solide 0 sur le solide 3 (liaison rotule de centre C) sont les actions mécaniques extérieures agissant sur l'ensemble E.*
- *L'action mécanique du fluide et l'action mécanique du solide 2 sur le solide 3 (pivot glissant d'axe $C,\vec{x}_2$) sont les actions mécaniques intérieures de E.*

3 - Principe Fondamental de la Statique (PFS)

3.1. Référentiel Galiléen

Un référentiel Galiléen est l'association d'un repère géométrique et d'un repère temporel pour lequel le Principe Fondamental de la Statique est vrai. En SII, on considère Galiléen :

- Tout repère **fixe** (i.e. sans mouvement) par rapport à la Terre.
- Ou tout repère en mouvement de **translation rectiligne**[5] **uniforme**[6] par rapport à la terre.

[5] sa trajectoire est donc une droite

[6] sa vitesse est constante

3.2. Equilibre

Un système E est en équilibre dans un référentiel Galiléen si, au cours du temps, chaque point de E conserve la même position part rapport au repère géométrique du référentiel.

3.3. Enoncé du PFS

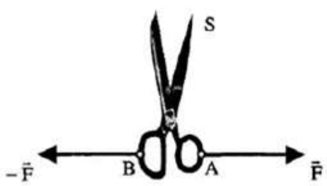
La condition nécessaire pour qu'un système matériel E soit en équilibre par rapport à un référentiel Galiléen est que la somme des torseurs des actions mécaniques extérieures à E soit nulle.

$$\sum\left\{F_{\bar{E}\to E}\right\}=\{0\} \rightarrow \sum {}_A\begin{Bmatrix}\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}}\\ \overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}}\end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$ où A est un point quelconque

Lorsque l'on somme des torseurs ces derniers doivent tous être écrits au même point !

La condition $\sum\left\{F_{\bar{E}\to E}\right\}=\{0\}$ est une condition nécessaire mais pas suffisante !

Equilibre de E $\Rightarrow$ / $\not\Leftarrow$ $\sum\left\{F_{\bar{E}\to E}\right\}=\{0\}$



Exemple du pilote automatique : Ecriture du PFS pour E=1 au point A_1 : $\sum\left\{F_{\bar{E}\to E}\right\}=\{0\}$

$$\rightarrow {}_{A_1}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{eau\to 1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1}(F_{eau\to 1})}\end{Bmatrix}+{}_{A_1}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{Rotule0\to 1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1}(F_{Rotule0\to 1})}\end{Bmatrix}+{}_{A_1}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{LA0\to 1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1}(F_{LA0\to 1})}\end{Bmatrix}+{}_{A_1}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{g\to 1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1}(F_{g\to 1})}\end{Bmatrix}+{}_{A_1}\begin{Bmatrix}\overrightarrow{F_{2\to 1}}\\ \overrightarrow{M_{A_1}(F_{2\to 1})}\end{Bmatrix}={}_{A_1}\begin{Bmatrix}\vec{0}\\ \vec{0}\end{Bmatrix}$$

3.4.Théorèmes généraux de la statique - Traduction vectorielle du PFS

L'énoncé du PFS conduit à l'écriture de deux équations vectorielles soit :

- Le **théorème de la résultante statique** : $\overrightarrow{R_{\bar{E}\to E}}=\vec{0}$
- Le **théorème du moment statique** : $\overrightarrow{M_{A(\bar{E}\to E)}}=\vec{0}$

 Florestan MATHURIN

Exemple du pilote automatique :
Ecriture du théorème de la résultante statique et du moment statique au point A_1 sur l'ensemble E=1.

Théorème de la résultante statique : $\overrightarrow{F_{eau\to1}}+\overrightarrow{F_{Rotule0\to1}}+\overrightarrow{F_{LA0\to1}}+\overrightarrow{F_{g\to1}}+\overrightarrow{F_{2\to1}}=\vec{0}$

Théorème du moment statique au point A_1 :

$$\overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{eau\to1})+\overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{Rotule0\to1})+\overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{LA0\to1})+\overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{g\to1})+\overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{2\to1})=\vec{0}$$

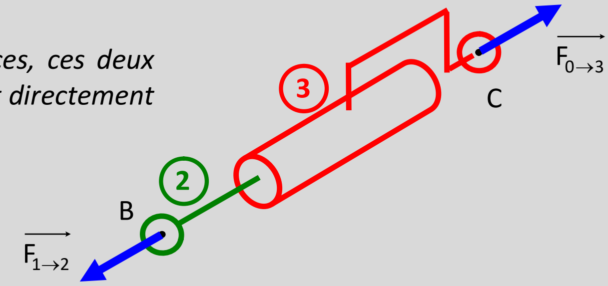
Le théorème de la résultante statique et le théorème du moment statique sont ensuite projetés sur les 3 axes d'une même base, ce qui conduit à **6 équations scalaires** dans le cas d'un **problème spatial**.

3.5. Théorème des actions réciproques : $\{F_{2\to1}\}=-\{F_{1\to2}\}$

3.6. Cas particulier d'un système matériel E soumis à 2 forces

Si un système matériel en équilibre subit l'action unique de 2 forces alors ces forces ont même norme et sont directement opposées.

Exemple du pilote automatique :
L'ensemble 2+3 est soumis à 2 forces, ces deux forces ont donc même norme et sont directement opposées.



3.7. Cas particulier des problèmes plan

Certains cas fréquemment rencontrés concernent les systèmes en équilibre sous l'effet d'actions mécaniques dont les résultantes sont coplanaires et les moments éventuels perpendiculaires à ce plan. Ces systèmes sont qualifiés de systèmes plans.

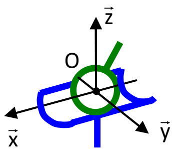
Dans le cas d'un **problème plan**, l'application du PFS ne peut fournir au maximum que **3 équations scalaires**(7).

(7) 2 équations du thm de la résultante statique projetée sur les 2 axes de la base appartenant au plan + 1 équation du thm du moment statique projetée sur le 3ème axe de la base normal au plan

Dans un problème plan, le torseur des actions mécaniques transmissibles possède forcement 3 composantes nulles.

Exemple :

Si on considère une liaison linéaire annulaire d'axe $(O,\vec{x})$ entre 2 solides 1 et 2, la forme générale du torseur d'action mécanique transmissible dans le cas tridimensionnel est donnée ci-contre. Si le problème est plan alors certains termes du torseur non nuls dans le cas tridimensionnel deviennent nécessairement nuls.



$$\{F_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix}0 & 0\\ Y_{12} & 0\\ Z_{12} & 0\end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Problème de plan $P(O\vec{x}\vec{y})$

$$\{F_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix}0 & \cancel{0}\\ Y_{12} & \cancel{0}\\ \cancel{Z_{12}} & 0\end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Problème de plan $P(O\vec{y}\vec{z})$

$$\{F_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix}\cancel{0} & 0\\ Y_{12} & \cancel{0}\\ Z_{12} & \cancel{0}\end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

Problème de plan $P(O\vec{x}\vec{z})$

$$\{F_{1\to2}\}=\begin{Bmatrix}0 & \cancel{0}\\ \cancel{Y_{12}} & 0\\ Z_{12} & \cancel{0}\end{Bmatrix}_{O\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

4 - DEMARCHE D'APPLICATION DU PFS

Lorsque l'on applique le PFS, les différentes étapes ci-dessous sont toujours les mêmes :

Etape 1 : On isole le solide ou l'ensemble de solides considérés (E).

Etape 2 : On identifie le type de problème (problème plan ou problème spatial, problème symétrique).

Etape 3 : On effectue un Bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME) appliquées sur (E) comprenant :

- Les actions mécaniques à distance [8].
- Les actions mécaniques de contact [9].

Le bilan des actions mécaniques extérieures est parfois grandement facilité par le graphe d'analyse.

Pour le bilan des actions mécaniques, trois outils peuvent être utilisés suivant le type de problèmes : l'outil torseur (plutôt pour les problèmes dans l'espace), l'outil vecteur (plutôt pour les problèmes plans), l'outil graphique (utile principalement pour les problèmes plans et permettant de visualiser le problème).

Etape 4 : On écrit le PFS[10].

Etape 5 : On projette les équations vectorielles et on résout le système d'équations scalaires pour déterminer les inconnues du problème [11].

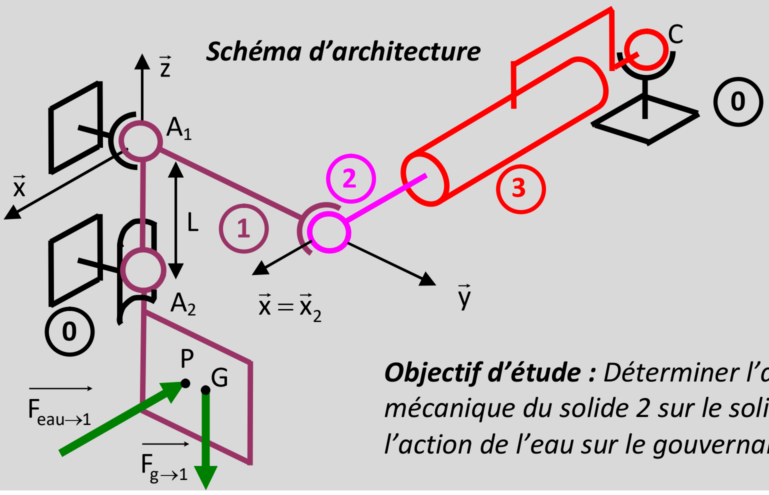
On réitère ces 5 étapes si plusieurs isolements sont nécessaires pour résoudre le problème.

Exemple du pilote automatique :

Données :

- *L'eau exerce une action mécanique sur le gouvernail modélisée globalement par une force $\overrightarrow{F_{eau\to 1}} = -F.\vec{x}$ en P de coordonnées (0, y_P, $-z_P$).*
- *Le fluide exerce une action mécanique sur le corps du vérin 3 ainsi que sur la tige du vérin 2.*
- *Seuls les solides 0 (de centre de gravité G et de masse m) et 1 (de centre de gravité G_1 et de masse m_1) sont soumis à l'action mécanique de la pesanteur.*

Schéma d'architecture



Objectif d'étude : *Déterminer l'action mécanique du solide 2 sur le solide 1 liée à l'action de l'eau sur le gouvernail.*

[8] En mécanique du solide, c'est souvent exclusivement limité à l'action de la pesanteur.

[9] Concernant les actions de contact, il faut lister les différentes liaisons avec l'extérieur et bien sur connaître les modèles d'actions mécaniques de liaison.

[10] Pour l'équation des moments, on choisit judicieusement le point d'expression.

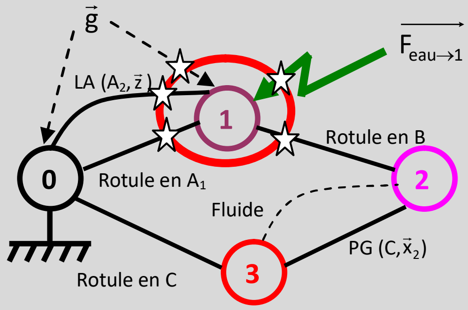
[11] Dans certains problèmes, il n'est parfois pas utile d'écrire toutes équations scalaires. Seule une ou une partie des équations peut être utile pour déterminer une inconnue.

Données géométriques : *A_1 a pour coordonnées (0, 0, 0) ; A_2 a pour coordonnées (0, 0, – L) ; G_1 a pour coordonnées (0, y_{G1}, $-z_{G1}$) ; B a pour coordonnées (0, y_B, 0).*

Etape 1 : *On isole le solide 1 seul.*

Etape 2 : *C'est un problème spatial donc on utilisera plutôt l'outil torseur.*

Etape 3 : *On effectue le bilan des Actions Mécaniques Extérieures (BAME).*



- *L'eau exerce une action mécanique sur le solide 1 modélisée globalement par une force $\overrightarrow{F_{eau\to1}} = -F.\vec{x}$ en P de coordonnées (0, y_P, $-z_P$).*
- *La pesanteur exerce une action mécanique sur le solide 1 modélisée globalement par une force $\overrightarrow{F_{g\to1}} = -M_1.g.\vec{z}$ en G de coordonnées (0, y_{G1}, $-z_{G1}$).*
- *Le solide 0 exerce deux actions mécaniques de contact (rotule en A_1 + linéaire annulaire d'axe (A_2, $\vec{z}$) sur le solide 1.*
- *Le solide 2 exerce une action mécanique de contact $\overrightarrow{F_{2\to1}} = X_{21}.\vec{x} = -\overrightarrow{F_{1\to2}}$ (rotule en B avec B qui a pour coordonnées (0, y_B, 0)) dont la direction est connue.*

Etape 4 : *On écrit le PFS.*

L'inconnue recherchée est X_{21}, les actions mécaniques connues sont $\overrightarrow{F_{eau\to1}}$ et $\overrightarrow{F_{g\to1}}$

→ L'écriture du théorème du moment statique sur le solide 1 au point A_1 projeté sur l'axe $\vec{z}$ permet d'obtenir une équation scalaire qui relie directement X_{21} à y_P, y_B et F.

Théorème du moment statique sur le solide 1 au point A_1 projeté sur l'axe $\vec{z}$:

$$\left(\overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{eau\to1}) + \overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{Rotule0\to1}) + \overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{LA0\to1}) + \overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{g\to1}) + \overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{2\to1})\right).\vec{z} = 0$$

$$\left(\overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{eau\to1}) + \overrightarrow{M_{A_1}}(\vec{F}_{2\to1})\right).\vec{z} = 0 \rightarrow \left(\overrightarrow{A_1P} \wedge \overrightarrow{F_{eau\to1}} + \overrightarrow{A_1B} \wedge \overrightarrow{F_{2\to1}}\right).\vec{z} = 0 \rightarrow y_P.F - y_B.X_{21} = 0$$

Etape 5 : $X_{21} = \dfrac{y_P}{y_B}.F$ *soit :* $\boxed{\overrightarrow{F_{2\to1}} = \dfrac{y_P}{y_B}.F.\vec{x}}$