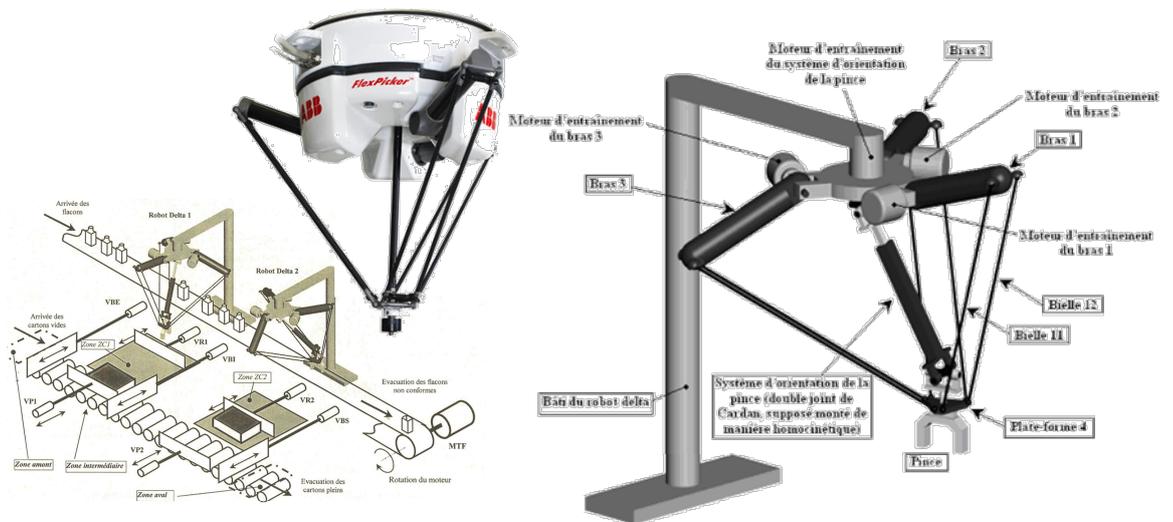


Modélisation des Actions Mécaniques - Partie 1



On s'intéresse à un robot Delta utilisé dans un poste de conditionnement de flacons. Les flacons, qui sortent d'un four de cuisson, sont disposés les uns derrière les autres sur un tapis roulant qui les achemine jusqu'au poste de mise en cartons. Une caméra, associée à un logiciel de reconnaissance de formes, s'assure de la conformité géométrique des flacons. Les flacons non conformes (présentant un défaut géométrique, renversé, cassé, etc.) sont évacués vers l'extérieur sur le même tapis. Chaque flacon conforme est saisi par un des deux robots Delta et est placé dans une alvéole du carton. Les deux robots Delta travaillent en parallèle sous la conduite d'une même Partie Commande : ils saisissent les flacons sur le même tapis roulant qui achemine les flacons et remplissent chacun un carton différent.

Exemple de système PINCE DU ROBOT DELTA

La statique est une partie de la mécanique qui étudie la relation de cause à effet entre l'équilibre relatif d'un système matériel et les actions mécaniques auxquelles ce système est soumis. L'un des objectifs de la statique est de conduire à la détermination de toute action mécanique nécessaire au dimensionnement ou à la prédiction de déformations (résistance des matériaux). En préalable à l'étude et à l'application du principe fondamental de la statique, il est nécessaire de définir la notion « d'action mécanique » d'un point de vue physique mais aussi d'un point de vue mathématique. L'objet de ce cours est donc de mettre en place les bases de la modélisation analytique des principales actions mécaniques qui seront utilisées lors de problèmes de statique.

Tout système est en permanence soumis à des actions mécaniques.

Sur le robot Delta, on retrouve par exemple l'action du flacon de parfum sur la pince, l'action du bras 1 sur la bielle 12, ...

1 - DEFINITIONS

Conséquence : Pour parler d'action mécanique, il faut nécessairement ISOLER un solide ou un ensemble de solides.

1.1. Action mécanique

1.2. Force

⁽¹⁾ Unité : Newton (N)
1 N = 1 Kg.m.s⁻²

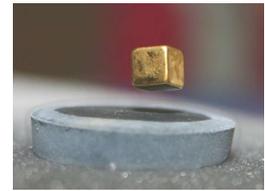
⁽²⁾ Unité : Newton mètre (N.m)

1.3. Moment d'une force

1.4. Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques identifiées à ce jour peuvent être classées en deux sortes :

- Les **actions mécaniques à distance**. Elles s'exercent au niveau du volume du solide ⁽³⁾.
- Les **actions mécaniques de contact**. Elles s'appliquent directement sur la surface du solide (action ponctuelle, linéique ou surfacique) ⁽⁴⁾.



Action mécanique à distance
Exemple : champ magnétique



Action mécanique de contact
Exemple : Air sur un parachute

⁽³⁾ Exemples : actions magnétiques, action de la pesanteur, ...

⁽⁴⁾ Exemples : pression d'un fluide sur un solide, actions de contact entre deux solides, ...

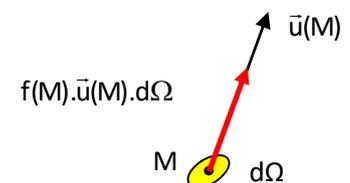
2 - INTRODUCTION A LA MODELISATION LOCALE ET GLOBALE DES ACTIONS MECANIQUES

Deux modèles, qui dépendent de l'objectif d'étude recherché, sont principalement utilisés pour modéliser les actions mécaniques : ce sont le modèle local et le modèle global.

2.1. Modélisation locale des actions mécaniques

Ce modèle permet de représenter localement toutes les actions mécaniques par un champ vectoriel. Ce modèle est utilisé lorsque l'on étudie par exemple les pressions de contact ou les déformations de solides ⁽⁵⁾.

Etape 1 : On définit à partir du modèle général ci-contre les actions mécaniques élémentaires sur chaque élément de domaine (hypothèse : les AM élémentaires sont proportionnelles à la mesure de l'élément de domaine $d\Omega$).



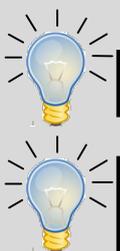
$\vec{u}(M)$: Vecteur unitaire quelconque
 $f(M)$: Fonction (qui dépend de M) appelée densité d'effort

L'élément de domaine $d\Omega$ peut correspondre à un volume élémentaire dV (cas des actions à distance) ou une surface élémentaire dS (cas des actions de contact).

Pour une action mécanique à distance, $f(M)$ correspond à une densité volumique. Pour une action mécanique de contact surfacique, $f(M)$ correspond à une densité surfacique et pour une action mécanique de contact linéique, $f(M)$ correspond à une densité linéique.

Etape 2 : On considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur le domaine étudié, la répartition de ces actions mécaniques élémentaires permet d'obtenir un champ vectoriel qui correspond à la modélisation locale des actions mécaniques.

Exemple : Modélisation locale de l'action mécanique du flacon de parfum sur un doigt de la pince du robot Delta par un champ de pression uniforme.



⁽⁵⁾ Les études de ce type ne sont pas aux programmes de CPGE PCSI/PSI et MPSI/MP

Etape 1 : Modélisation de l'action mécanique élémentaire

$\vec{u}(M)$: Normale à l'élément dS

$d\vec{F}_{\text{flacon} \rightarrow \text{doigt}} = -p(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot dS$

avec $p(M)$ densité surfacique de l'effort

$d\Omega = dS$: Surface élémentaire

Etape 2 : On considère que l'on a une infinité d'actions mécaniques élémentaires sur la surface (S)

On obtient donc au final un champ de pression comme modèle d'action mécanique.

2.2. Modélisation globale des actions mécaniques

Lorsque l'on étudie un ensemble de **solides indéformables**, il est suffisant d'utiliser un modèle global pour les actions mécaniques. Il permet notamment de représenter globalement les actions mécaniques sous forme de **forces**. Cette modélisation est très efficace pour la résolution de problème de statique des solides ou de dynamique des solides.



Une force est obtenue dans ce cas à partir de l'intégration de l'ensemble des actions élémentaires sur le domaine du modèle local :

$$\vec{F} = \int_{\Omega} f(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot d\Omega$$

où Ω peut être soit un volume V (on se retrouve alors à calculer soit une intégrale de volume), soit une surface de contact S (on se retrouve alors à calculer une intégrale de surface).

Exemple : Modélisation globale de l'action mécanique du flacon sur un doigt de la pince du robot Delta au point P.

Modèle local

Modèle global au point P

Intégration

$$\vec{F}_{\text{flacon} \rightarrow \text{doigt}} = - \int_S p(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot dS$$


La notion de force sous forme de vecteur lié (P, \vec{F}) est cependant insuffisante pour permettre de représenter d'un point de vue global toutes les actions mécaniques et notamment la tendance que peut avoir une force à modifier le mouvement de rotation du système sur lequel elle agit, on introduit donc la notion de **moment d'une force**.



Un moment d'une force en A (où A est un point quelconque) est modélisé par un vecteur obtenu à partir de l'intégration de l'ensemble des actions élémentaires sur le domaine du modèle local :

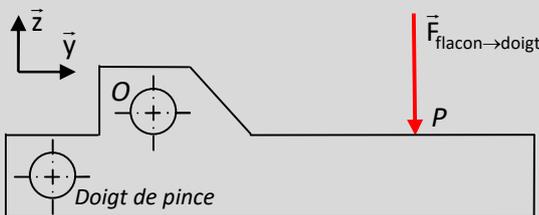
$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \int_{\Omega} \vec{AP} \wedge f(M) \cdot \vec{u}(M) \cdot d\Omega$$

où Ω peut être soit un volume V (on se retrouve alors à calculer soit une intégrale de volume), soit une surface de contact S (on se retrouve alors à calculer une intégrale de surface).

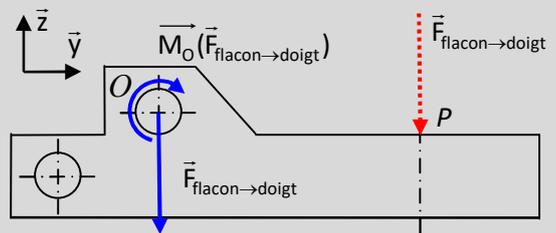
Exemple : Si l'on s'intéresse à l'effet de l'action mécanique du flacon sur le doigt de la pince au point O, on constate que celle-ci a tendance à pousser le doigt suivant la direction de $\vec{F}_{\text{flacon} \rightarrow \text{doigt}}$ mais aussi à faire tourner le doigt autour de l'axe (O, \vec{x}) .

Par conséquent il faut modéliser au point O l'action mécanique du flacon sur le doigt par une force $\vec{F}_{\text{flacon} \rightarrow \text{doigt}}$ et un moment en O $\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{flacon} \rightarrow \text{doigt}})$ tel que $\vec{M}_O(\vec{F}_{\text{flacon} \rightarrow \text{doigt}}) = \vec{OP} \wedge \vec{F}_{\text{flacon} \rightarrow \text{doigt}}$.

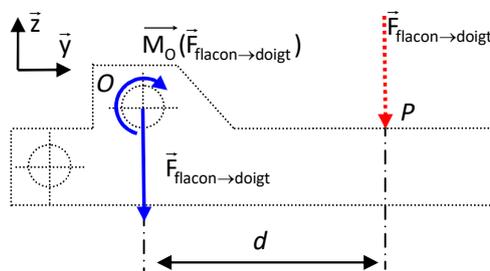
Modèle global de l'action mécanique du flacon sur la pince au point P



Modèle global de l'action mécanique du flacon sur la pince au point O



Petite astuce : Pour calculer rapidement le moment d'une force, on peut utiliser la technique du bras de levier :

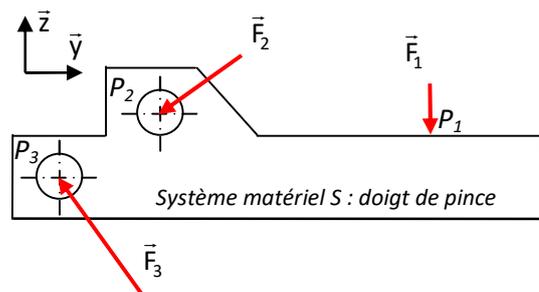


3 - MODELE GLOBAL GENERAL DES ACTIONS MECANIQUES

3.1. Définition

Le modèle global d'action mécanique sera toujours celui retenu pour tous les problèmes de mécanique du solide indéformable.

D'une façon générale si un système matériel S subit de la part d'un ensemble matériel E une action mécanique représentée par un ensemble fini de n forces (P_i, \vec{F}_i) .



Ensemble matériel E : ensemble des éléments extérieurs au doigt de la pince



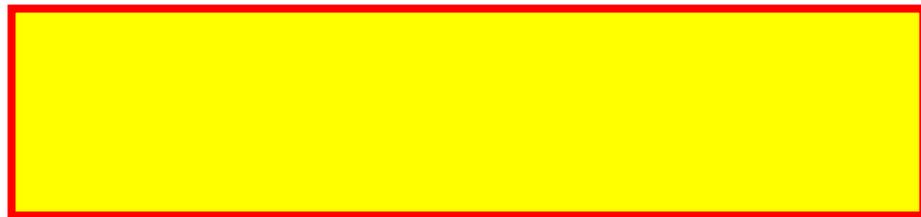
On caractérise globalement cette action mécanique par les deux vecteurs suivants :

- La résultante de l'action mécanique de $E \rightarrow S$: $\vec{R}_{E \rightarrow S} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$
- Le moment résultant au point A de l'action mécanique de $E \rightarrow S$: $\vec{M}_{A(E \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i$ et on montre que le moment résultant vérifie la relation de changement de point d'un torseur.

Rappel : Un torseur est un couple ordonné de deux champs vectoriels tel que :

- Le 1^{er} champ, appelé résultante du torseur et noté \vec{R} , est un champ constant.
- Le 2^{ème} champ, appelé moment du torseur et noté \vec{M} , est un champ variable vérifiant la définition des champs de ce moment $\forall A \text{ et } B \in (\text{Espace}) \vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}$

Par conséquent toute action mécanique d'un ensemble matériel E sur un système mécanique S est caractérisée par un torseur d'action mécanique :



Lorsque l'on somme des torseurs ces derniers doivent tous être écrits au même point ! Exemple : $\{F_{E \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_1 \\ \vec{M}_A(\vec{F}_1) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_2 \\ \vec{M}_A(\vec{F}_2) \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} \vec{F}_3 \\ \vec{M}_A(\vec{F}_3) \end{array} \right\}$

3.2. Notations

Soit $\vec{R}_{E \rightarrow S} = X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z}$ et $\vec{M}_{A(E \rightarrow S)} = L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z}$. La notation condensée en torseur peut se faire de deux manières :

- En colonne : en bas à gauche, on indique le point où on exprime le torseur. En bas à droite on indique la base dans laquelle on exprime $\vec{R}_{E \rightarrow S}$ et $\vec{M}_{A(E \rightarrow S)}$ qui ont pour composantes respectives (X, Y, Z) et (L, M, N) .

$$\{F_{E \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_{A(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

- En ligne : en bas à gauche, on indique le point où on exprime le torseur. Il n'est plus utile de préciser la base d'expression des vecteurs puisque celle-ci est explicitée dans le torseur.

$$\{F_{E \rightarrow S}\} = \left\{ \begin{array}{l} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ L.\vec{x} + M.\vec{y} + N.\vec{z} \end{array} \right\}_A$$

3.3. Actions mécaniques particulières

- **Torseur couple** : un torseur couple est de la forme $\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \vec{C} \end{array} \right\}_A$ et s'écrit de la même manière en tout point.

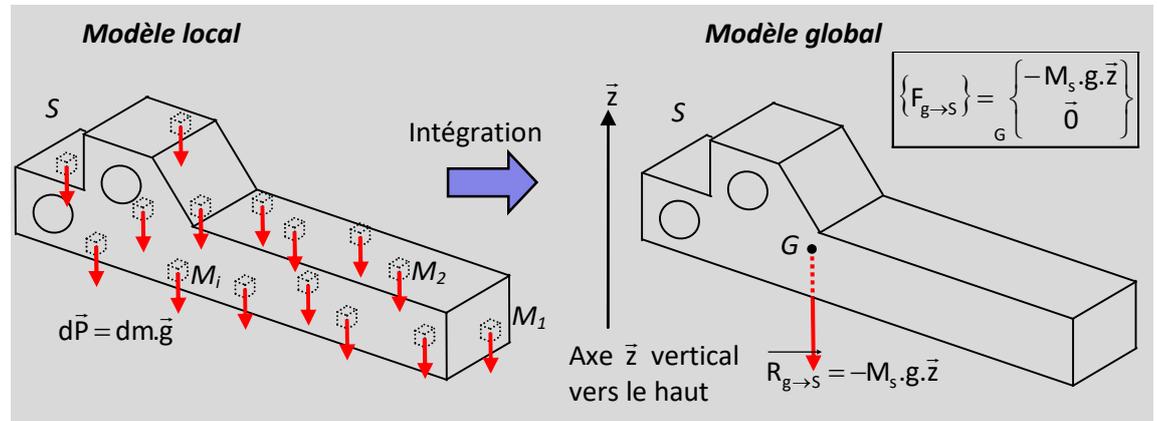
- **Glisseur** : un glisseur est de la forme $\left\{ \begin{array}{c} \vec{F} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A$ au point d'application de la force où A est un point de l'axe central du torseur $\{F_{E \rightarrow S}\}$.

La notation en ligne est à privilégier car elle permet d'éviter de faire des projections lorsqu'un vecteur possède des composantes exprimées dans des bases différentes.

4 - ACTION MECANIQUE DE LA PESANTEUR DANS LE CAS DE SOLIDES HOMOGENES

4.1. Définition du modèle local et du modèle global

L'effet de la pesanteur est une action mécanique à distance, elle se manifeste par un champ d'accélération. Ce champ produit en tout point M d'un solide S de volume V une force élémentaire $d\vec{P}$ appliquée en M proportionnelle à la masse dm du volume élémentaire dV entourant M : $d\vec{P} = dm \cdot \vec{g}$.



$$\text{Force résultante : } \vec{R}_{g \rightarrow S} = \int_V d\vec{P} \rightarrow \vec{R}_{g \rightarrow S} = \int_V dm \cdot \vec{g} \rightarrow \boxed{\vec{R}_{g \rightarrow S} = -M_S \cdot \vec{g}}$$

$$\text{Moment résultant au point A : } \vec{M}_{A(g \rightarrow S)} = \int_V \vec{AM} \wedge d\vec{P} \text{ soit : } \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{g \rightarrow S} = -M_S \cdot \vec{g} \\ \vec{M}_{A(g \rightarrow S)} = \int_V \vec{AM} \wedge d\vec{P} \end{array} \right.$$

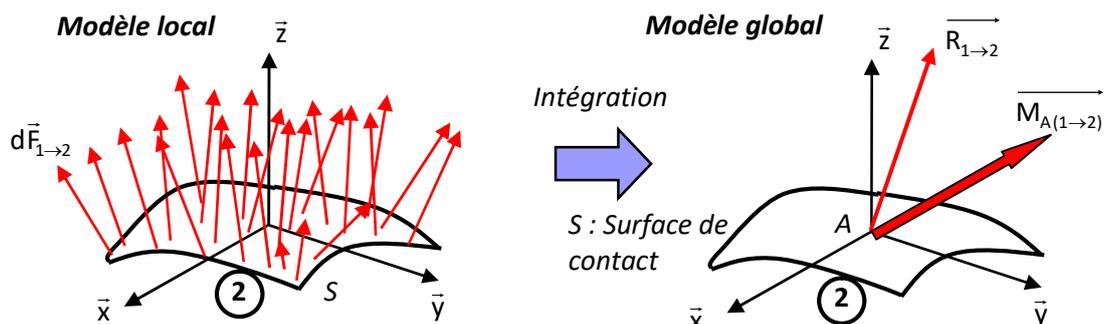
Il est possible de définir un point particulier du torseur noté G, centre de gravité du solide (S), de manière à avoir :

5 - ACTIONS MECANQUES DE CONTACT SANS FROTTEMENT - TORSEUR D'ACTION MECANIQUE TRANSMISSIBLE DES LIAISONS NORMALISEES

Tout contact entre solide se fait normalement avec du frottement, cependant dans une première approche simplificatrice des mécanismes, on peut négliger l'influence du frottement.

5.1. Définition du modèle local et du modèle global

On note $\left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{1 \rightarrow 2} \\ \vec{M}_{A(1 \rightarrow 2)} \end{array} \right\}_A$ l'action mécanique du solide 1 sur le solide 2 sur une surface S.



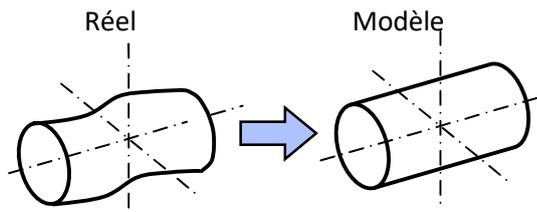
Le modèle global est obtenu à partir du modèle local : $\{\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} = \int d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \\ \mathbf{M}_{A(1 \rightarrow 2)} = \int_{(S)} \vec{AM} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \end{array} \right\}_A$

5.2. Torseur d'action mécanique transmissible des liaisons normalisées – Modèle liaison parfaite

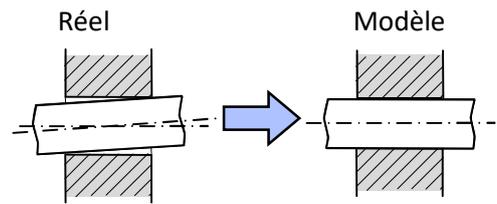
Les modèles d'actions mécaniques de contact pour les liaisons normalisées sous forme de torseur d'action mécanique transmissible sont basées sur le modèle de la liaison parfaite ⁽⁶⁾ :

⁽⁶⁾ Le modèle liaison parfaite est valable si les 4 hypothèses suivantes sont valides.

Hypothèse 1 : géométrie parfaite



Hypothèse 2 : liaison sans jeu

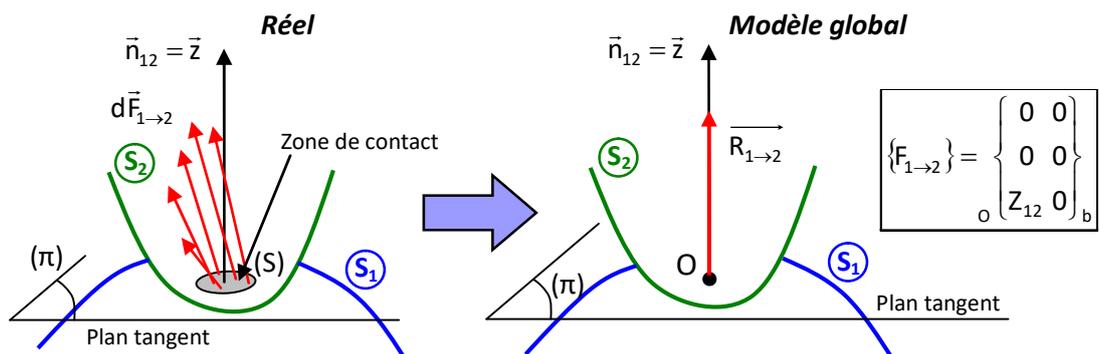


Hypothèse 3 : déformations nulles

Hypothèse 4 : pas de frottement

5.3. Torseur d'action mécanique transmissible des liaisons normalisées - Exemple

(2)/(1) : Liaison ponctuelle en O de normale (O, \vec{z}) entre les solide S_2 et S_1 :



Force résultante : $\mathbf{R}_{1 \rightarrow 2} = \int_{(S)} d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = Z_{12} \cdot \vec{z}$

Moment résultant en O : $\mathbf{M}_{O(1 \rightarrow 2)} = \int_{(S)} \vec{OM} \wedge d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \vec{0}$

$\Rightarrow \{\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$



5.4. Dualité torseur d'action transmissible/torseur cinématique des liaisons normalisées

Il y a une complémentarité entre le torseur cinématique et le torseur d'action mécanique transmissible.

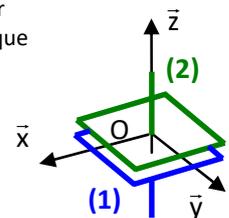
Exemple : Liaison appui plan de normale (O, \vec{z})

Torseur d'action mécanique transmissible

$$\{\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Torseur cinématique

$$\{\mathbf{C}_{1/2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & v_{x12} \\ 0 & v_{y12} \\ \Omega_{z12} & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$



5.5 Torseur d'action mécanique transmissible des liaisons normalisées - Tableau récapitulatif

Chaque liaison normalisée possède un torseur d'action mécanique transmissible.



Tous les torseurs d'action mécanique transmissible des liaisons normalisées sont à connaître par cœur ! La page entière est donc à connaître par cœur !

⁽⁷⁾ La relation de dépendance entre X_{12} et L_{12} s'écrit :

$$L_{12} = -X_{12} \cdot \text{pas} / (2 \cdot \pi)$$

(pas en mm)

Liaison ponctuelle en O de normale (O, \vec{z})		Liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x})	
	$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$		$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$ + 1 relation de dépendance ⁽⁷⁾
Liaison Linéaire Rectiligne d'axe (O, \vec{x}) et de normale (O, \vec{z})		Liaison pivot glissant d'axe (O, \vec{x})	
	$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$		$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$
Liaison linéaire annulaire d'axe (O, \vec{x})		Liaison pivot d'axe (O, \vec{x})	
	$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$		$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$
Liaison appui plan de normale (O, \vec{z})		Liaison glissière d'axe (O, \vec{x})	
	$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$		$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$
Liaison rotule en O		Liaison complète	
	$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$		$\{F_{1 \rightarrow 2}\} = \begin{Bmatrix} X_{12} & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_{(x, y, z)}$

6 - ACTIONS MECANQUES DE CONTACT AVEC FROTTEMENT (VOIR COURS 25)