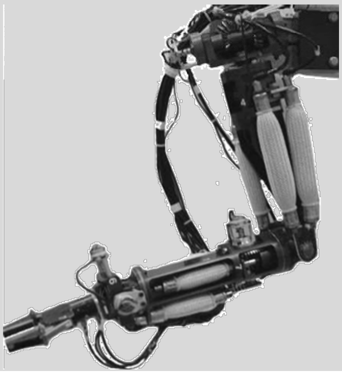
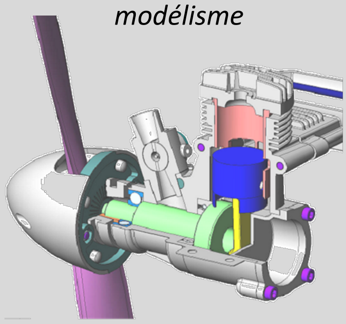
Loi Entrée/Sortie Cinématique d'une Chaîne de Solides - Partie 2

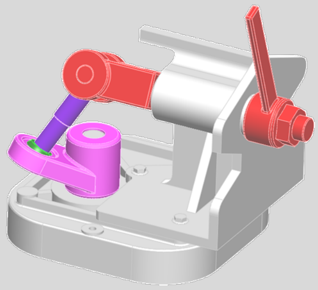
Exemple de Systèmes Mécaniques Présentant une Chaîne de Solides

BRAS DE ROBOT, MICROMOTEUR, ...

Chaînes cinématiques ouvertes	**Chaînes cinématiques fermées**	
Type bras de manipulation	Type mécanismes de transformation de mouvements	
Exemple d'un bras de robot	*Exemple d'un micromoteur de modélisme*	*Exemple d'un mécanisme de barrière automatique*







On appelle loi **Entrée**/**Sortie** cinématique d'une chaîne de solides d'un système mécanique, l'ensemble des relations entre les paramètres de position(1) de la pièce d'entrée et ceux de la pièce de sortie sur laquelle on veut déterminer les effets du mouvement imposé en entrée(2).

(1) ou de leurs dérivées

(2) en général le mouvement d'entrée est imposé par un actionneur

On analyse toujours les chaînes de solides, même les plus complexes à partir de sa structure en chaînes ouvertes et/ou fermées(3). La technique pour obtenir la loi Entrée/Sortie cinématique dépendra ensuite de la nature de la chaîne de solides.

(3) Toutes les chaînes de solides peuvent être décomposées comme une somme de chaînes simples (ouvertes ou fermées). Si un système présente plusieurs chaînes cinématiques, on étudie tour à tour chaque chaîne cinématique élémentaire du système complexe.

Dans le cas des chaînes cinématiques ouvertes, la loi **entrée**/**sortie** cinématique concerne la relation entre les **coordonnées articulaires** et les **coordonnées opérationnelles du point en bout de chaîne**.

Dans le cas des chaînes cinématiques fermées, la loi **entrée**/**sortie** cinématique concerne la relation entre le **paramètre d'entrée** et le **paramètre de sortie en bout de chaîne**.

1 - LOI ENTREE/SORTIE DE CHAINES CINEMATIQUES OUVERTES (Voir cours 10)

2 - LOI ENTREE/SORTIE DE CHAINES CINEMATIQUES FERMEES (exemple type : mécanismes de transformation de mouvement)

Certaines caractéristiques géométriques sont invariantes, elles font partie de la définition physique du mécanisme et sont supposées connues. D'autres paramètres sont des données variables représentatives des mouvements du système. Dans le cas de chaines cinématiques fermées, la loi **entrée**/**sortie** est une loi exprimant **le(s) paramètre(s) de sortie** du système uniquement en fonction **du(des) paramètre(s) d'entrée** et des caractéristiques géométriques invariantes du système.

La loi entrée sortie d'une chaîne cinématique fermée peut être obtenue par :

- une fermeture géométrique ou une fermeture angulaire,
- une fermeture par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante,
- l'écriture d'une équation obtenue par une condition de non glissement,

- une fermeture cinématique, …

2.1. Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture géométrique (Voir cours 10)

2.2. Calcul d'une loi d'entrée sortie par produit scalaire de 2 vecteurs d'orientation relative constante

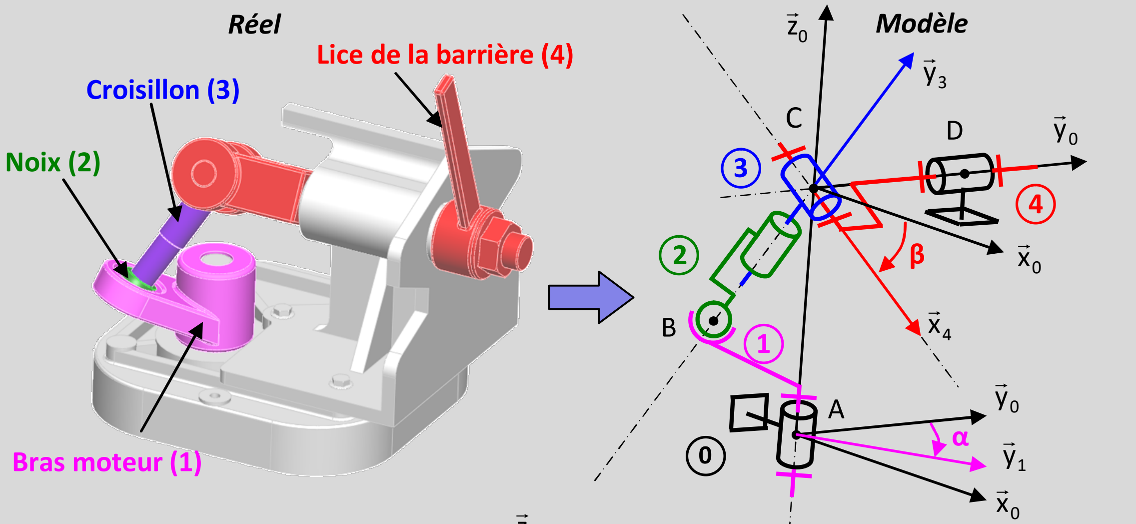
La loi **entrée/sortie** dans le cas de chaines fermées peut parfois se faire en tenant compte de la particularité angulaire du système (conservation d'une valeur angulaire lors du mouvement par exemple).

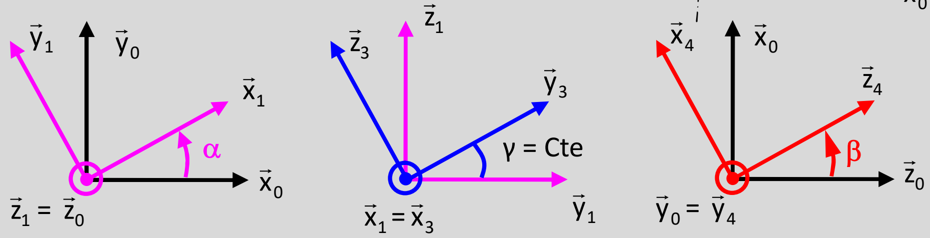
Exemple de la barrière Sinusmatic.
La barrière Sinusmatic est un système de transformation de mouvement qui s'adapte sur un motoréducteur. Il permet de transformer le mouvement d'entrée du moteur (rotation continue) en un mouvement de rotation alternative d'amplitude π/2 sur la lice.

Le système est constitué :

- *D'un bras moteur 1 en liaison pivot avec le bâti 0 suivant l'axe $(A, \vec{z}_0)$.*
- *D'une noix en liaison rotule en B avec le bras moteur 1.*
- *D'un croisillon en liaison pivot glissant suivant de l'axe $(B, \vec{y}_3)$.*
- *D'un arbre de lice 4 en liaison pivot suivant de l'axe $(C, \vec{x}_4)$ avec le croisillon 3 et en liaison pivot suivant de l'axe $(D, \vec{y}_0)$ avec bâti 0.*

Le paramètre d'entrée est le paramètre α tel que $\alpha = (\vec{x}_0, \vec{x}_1) = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ *et le paramètre de sortie est le paramètre β tel que* $\beta = (\vec{x}_0, \vec{x}_4) = (\vec{z}_0, \vec{z}_4)$.





La particularité angulaire de ce système est que le vecteur $\overrightarrow{BC}$ *est toujours orthogonal avec l'axe* $\vec{x}_4$. *Par conséquent le produit scalaire des 2 vecteurs d'orientation* $\vec{y}_3.\vec{x}_4$ *est nul :* $\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0$

$\vec{y}_3.\vec{x}_4 = 0$ *avec* $\vec{y}_3 = \cos\gamma.\vec{y}_1 + \sin\gamma.\vec{z}_1$ *et* $\vec{x}_4 = -\sin\beta.\vec{z}_0 + \cos\beta.\vec{x}_0$

Soit : $(\cos\gamma.\vec{y}_1 + \sin\gamma.\vec{z}_1).(-\sin\beta.\vec{z}_0 + \cos\beta.\vec{x}_0) = 0$

$$-\cos\gamma.\sin\beta.\vec{y}_1.\vec{z}_0 + \cos\gamma.\cos\beta.\vec{x}_0.\vec{y}_1 - \sin\gamma.\sin\beta.\vec{z}_0.\vec{z}_1 + \sin\gamma.\cos\beta.\vec{x}_0.\vec{z}_1 = 0$$

$$-\cos\gamma.\cos\beta.\sin\alpha - \sin\gamma.\sin\beta = 0 \rightarrow -\cos\gamma.\cos\beta.\sin\alpha = \sin\gamma.\sin\beta$$

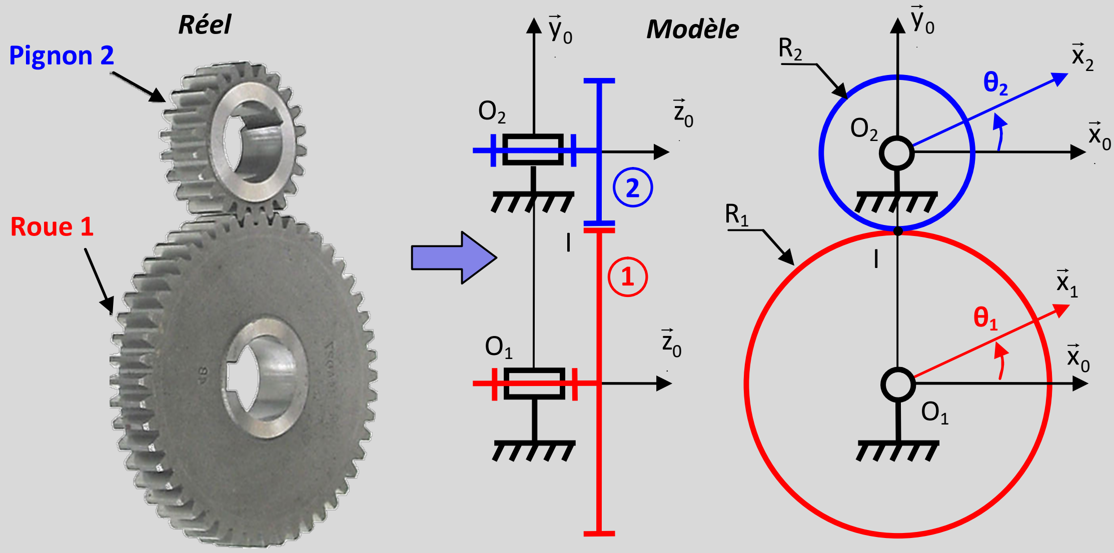
$-\sin\alpha = \dfrac{\sin\gamma}{\cos\gamma}.\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}$ *Soit la loi d'entrée sortie :* $\boxed{-\sin\alpha = \tan\gamma.\tan\beta}$

→ *Pour γ = π/4 l'amplitude de la lice est de π/2*

2.3. Calcul d'une loi d'entrée sortie à partir d'une condition de non glissement

La loi **entrée/sortie** dans le cas de chaines fermées peut parfois se faire en tenant compte de la condition de non glissement au point de contact entre deux pièces du mécanisme.

Exemple du réducteur simple à engrenage à contact extérieur.
Un réducteur à engrenage est un mécanisme constitué de deux roues dentées, chacune étant en rotation autour d'un axe, les deux axes restant fixes l'un par rapport à l'autre de sorte qu'une des roues entraîne l'autre par action de dents successivement en contact.



La condition de non glissement au point de contact s'écrit $\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \vec{0}$

Nature du mouvement de 2/1 ? : Mouvement complexe.

$\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \overrightarrow{V_{I,2/0}} - \overrightarrow{V_{I,1/0}} = \vec{0}$ → On décompose en mouvements simples.
2/1 = 2/0 – 1/0

Nature du mouvement de 2/0? :
Rotation autour de l'axe (O_1, $\vec{z}_0$)

Champ des vitesses

$$\overrightarrow{V_{I,2/0}} = \overrightarrow{V_{O_2,2/0}} + \overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}}$$

avec $\overrightarrow{V_{O_2,2/0}} = \vec{0}$ et

$$\overrightarrow{IO_2} \wedge \overrightarrow{\Omega_{2/0}} = R_2.\vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_2.\vec{z}_0 = R_2.\dot{\theta}_2.\vec{x}_0$$

Nature du mouvement de 1/0 ? :
Rotation autour de l'axe (O_1, $\vec{z}_0$)

Champ des vitesses

$$\overrightarrow{V_{I,1/0}} = \overrightarrow{V_{O_1,1/0}} + \overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$$

avec $\overrightarrow{V_{O_1,1/0}} = \vec{0}$ et

$$\overrightarrow{IO_1} \wedge \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = -R_1.\vec{y}_0 \wedge \dot{\theta}_1.\vec{z}_0 = -R_1.\dot{\theta}_1.\vec{x}_0$$

Exercice : Poser le modèle puis déterminer la loi entrée sortie d'un engrenage simple à contact intérieur.

$\rightarrow \overrightarrow{V_{I,2/0}} = R_2.\dot{\theta}_2.\vec{x}_0$ $\quad\quad$ $\rightarrow \overrightarrow{V_{I,1/0}} = -R_1.\dot{\theta}_1.\vec{x}_0$

Soit $\overrightarrow{V_{I,2/1}} = \overrightarrow{V_{I,2/0}} - \overrightarrow{V_{I,1/0}} = R_2.\dot{\theta}_2.\vec{x}_0 + R_1.\dot{\theta}_1.\vec{x}_0 = \vec{0} \rightarrow R_2.\dot{\theta}_2 + R_1.\dot{\theta}_1 = 0$

Soit la loi d'entrée sortie : $\boxed{\dot{\theta}_2 = -\dfrac{R_1}{R_2}.\dot{\theta}_1}$

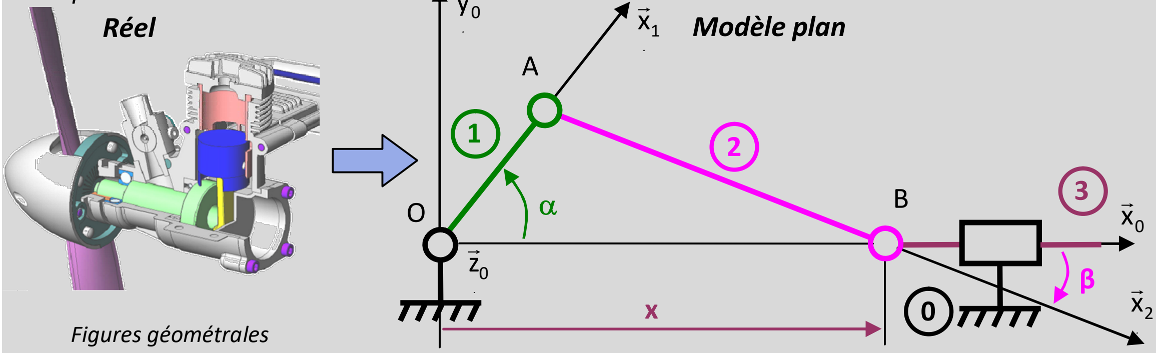
2.4. Calcul d'une loi d'entrée sortie par fermeture cinématique

[4] Des 2 équations vectorielles obtenues, seule la composition des vecteurs vitesse instantanés sera utile.

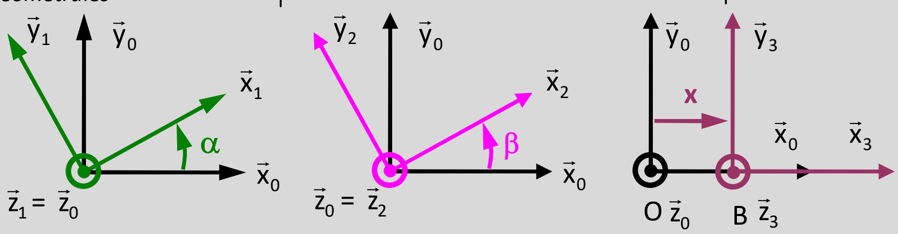
Le calcul d'une loi **entrée/sortie** par fermeture cinématique consiste à déterminer les relations entre les dérivées des paramètres et les paramètres eux-mêmes de manière à observer leur évolution au cours du temps. On écrit pour cela une fermeture cinématique par composition des mouvements [4].

Les équations obtenues par fermeture de chaîne cinématique correspondent aux dérivées des équations obtenues par fermeture géométrique. Les deux approches sont donc équivalentes mais la dérivation de la fermeture géométrique est généralement plus rapide.

Exemple du micromoteur



Figures géométrales



La fermeture cinématique s'écrit : $\{\mathcal{V}_{0/3}\} + \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\} = \{0\}$ *soit :*

$$_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 0/3}} \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{3/2}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 3/2}} \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{2/1}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} \end{Bmatrix} + {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{1/0}} \\ \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega_{0/3}} + \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}} = \vec{0} \\ \overrightarrow{V_{A\in 0/3}} + \overrightarrow{V_{A\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{A\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = \vec{0} \end{cases}$$

Avec :

$\overrightarrow{V_{A\in 0/3}} = -\overrightarrow{V_{B\in 3/0}} = -\dot{x}.\vec{x}_0$

$\overrightarrow{V_{A\in 3/2}} = \overrightarrow{V_{A\in 3/2}} + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega_{3/2}} = L_2.\vec{x}_2 \wedge -\dot{\beta}.\vec{z}_0 = L_2.\dot{\beta}.\vec{y}_2$

$\overrightarrow{V_{A\in 2/1}} = \vec{0}$

$\overrightarrow{V_{A\in 1/0}} = L.\dot{\alpha}.\vec{y}_1$

Soit : $-\dot{x}.\vec{x}_0 + L_2.\dot{\beta}.\vec{y}_2 + L.\dot{\alpha}.\vec{y}_1 = \vec{0} \rightarrow \begin{cases} -L_1.\dot{\alpha}.\sin\alpha - L_2.\dot{\beta}.\sin\beta - \dot{x} = 0 \\ L_1.\dot{\alpha}.\cos\alpha + L_2.\dot{\beta}.\cos\beta = 0 \end{cases}$

Ce qui correspond bien aux 2 équations scalaires obtenues après dérivation des 2 équations scalaires de la fermeture géométrique.