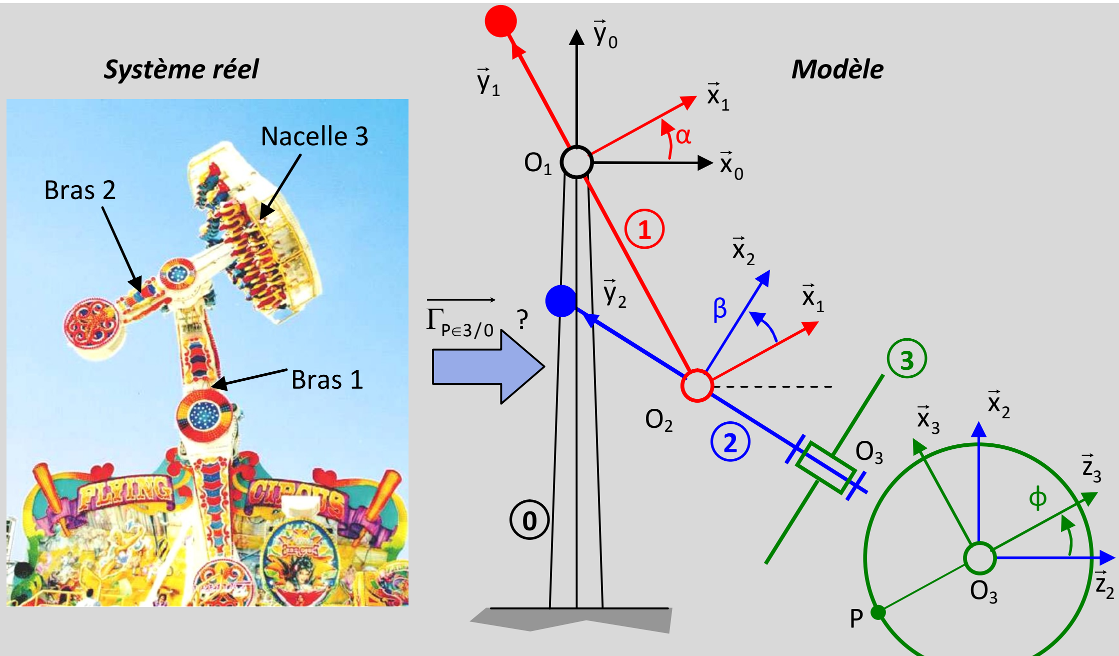
Composition de Mouvement



Exemple de Système Mécanique

MANEGE MAGIC ARMS

Pour aborder une étude cinématique, on s'intéresse systématiquement à la nature du mouvement des solides et on constate souvent que ce mouvement peut être complexe. Pour calculer un vecteur vitesse, il peut donc être judicieux de décomposer ce mouvement complexe en plusieurs mouvement simples : c'est la composition de mouvement.

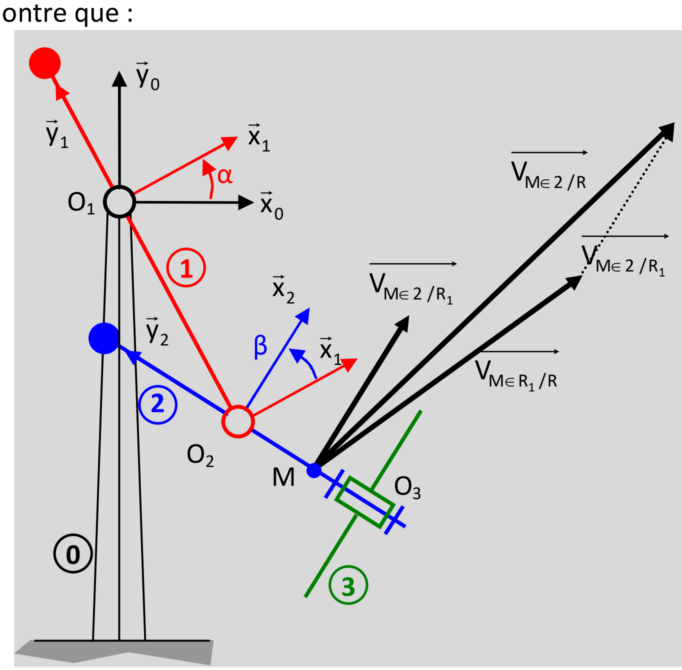
1 - Composition des Vecteurs Vitesse

1.1. Définition

Soit le solide 2 en mouvement par rapport au repère R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère R. Pour tout point M $\in$ 2 on montre que :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}}$$

- $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}}$ est le vecteur vitesse absolue (l'observateur est fixe par rapport à R et observe le mouvement de M)
- $\overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}}$ est le vecteur vitesse relative (l'observateur est fixe par rapport à R_1 et observe le mouvement de M)
- $\overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}$ est le vecteur vitesse d'entrainement (l'observateur est fixe par rapport à R et observe le mouvement du point de R_1 qui coïncide à l'instant t avec le point M)



 Florestan MATHURIN

Ne pas oublier les précautions d'usage pour le calcul du vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}$ car le point M est cinématiquement lié au repère R_1 mais n'a aucune réalité physique sur le solide 1 !

1.2. Démonstration de la formule $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}$

On cherche à définir la relation entre $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}}$ et $\overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}}$.

On a par définition : $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{M/R}} = \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OM}\right|_R = \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}\right|_R = \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}\right|_R + \left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{O_1M}\right|_R$

Pour la 1ère dérivée vectorielle, comme O_1 est l'origine du repère R_1 on a : $\left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{OO_1}\right|_R = \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}}$

Pour la 2ème dérivée vectorielle, on a en utilisant la formule de la dérivée vectorielle :

$$\left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1M}\right|_R = \left.\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1M}\right|_{R_1} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

Et par définition : $\left.\dfrac{d}{dt}\overrightarrow{O_1M}\right|_{R_1} = \overrightarrow{V_{M/R_1}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}}$

D'où : $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}} + \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$

Soit en réordonnant la relation : $\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$

Or : $\overrightarrow{V_{M\in R_1/R}} = \overrightarrow{V_{O_1\in R_1/R}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{O_1M}$

D'où : $\boxed{\overrightarrow{V_{M\in 2/R}} = \overrightarrow{V_{M\in 2/R_1}} + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}}$

1.3. Généralisation

De manière encore plus générale, si un solide S est en mouvement par rapport au repère R_n, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{n-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_i, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{i-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R, alors, pour tout point appartenant à S :

$$\boxed{\overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \overrightarrow{V_{M\in S/R_n}} + \ldots + \overrightarrow{V_{M\in R_i/R_{i-1}}} + \ldots + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}}}$$

La composition des vecteurs vitesse reprend, au niveau des repères, le principe de la relation de Chasles des vecteurs.

Lorsqu'il y a plus de 3 repères en jeu, les termes « vecteur vitesse relative », et « vecteur vitesse d'entrainement ne sont plus significatifs.

3/0 : mouvement complexe

2/1 : *mouvement de rotation autour de l'axe ($O_2, \vec{z}$)*

Exemple du manège Magic-Arms : $\overrightarrow{V_{P\in 3/0}} = \overrightarrow{V_{P\in 3/2}} + \overrightarrow{V_{P\in 2/1}} + \overrightarrow{V_{P\in 1/0}}$

3/2 : *mouvement de rotation autour de l'axe ($O, \vec{y}_2$)*

1/0 : *mouvement de rotation autour de l'axe ($O_1, \vec{z}$)*

2 - Composition des Vecteurs Vitesse Instantane de Rotation

2.1. Définition

Si on considère le solide 2 auquel est associé le repère R_2, en mouvement par rapport au repère

R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère R, les mouvements relatifs des 3 repères R, R_1, R_2 induisent l'existence des 3 vecteurs vitesse instantanée de rotation $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}}$, $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}}$ et $\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$. On montre que :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}}$$

2.2. Démonstration de la formule $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$

On considère un vecteur dépendant du temps $\vec{u}$

Par définition on a : $\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_1} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} \wedge \vec{u}$ (1) et $\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_1} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R} + \overrightarrow{\Omega_{R/R_1}} \wedge \vec{u}$ (2)

En soustrayant membre à membre les 2 relations précédentes, (1) – (2), on obtient :

$$\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_2} + \left(\overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}\right) \wedge \vec{u}$$

Or par définition $\left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R} = \left.\frac{d}{dt}\vec{u}\right|_{R_2} + \overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} \wedge \vec{u}$

On en déduit donc que : $\overrightarrow{\Omega_{R_2/R}} = \overrightarrow{\Omega_{R_2/R_1}} + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}$

2.3. Généralisation

De manière encore plus générale, si un solide S est en mouvement par rapport au repère R_n, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{n-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_i, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{i-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R, alors, pour tout point appartenant à S :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \overrightarrow{\Omega_{S/R_n}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{R_i/R_{i-1}}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}}}$$

3/0 : mouvement complexe

2/1 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O_2, \vec{z})$

Exemple du manège Magic-Arms : $\overrightarrow{\Omega_{3/0}} = \overrightarrow{\Omega_{3/2}} + \overrightarrow{\Omega_{2/1}} + \overrightarrow{\Omega_{1/0}}$

3/2 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O, \vec{y}_2)$

1/0 : *mouvement de rotation autour de l'axe* $(O_1, \vec{z})$

3 - Composition des Torseurs Cinematiques

Définition

La composition des torseurs cinématiques n'est qu'une forme condensée des compositions des vecteurs vitesse et des vecteurs vitesse instantanée de rotation.

Si un solide S est en mouvement par rapport au repère R_n, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{n-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_i, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R_{i-1}, …, lui-même en mouvement par rapport au repère R, alors, pour tout point appartenant à S :

$\begin{cases} \overrightarrow{V_{M\in S/R}} = \overrightarrow{V_{M\in S/R_n}} + \ldots + \overrightarrow{V_{M\in R_i/R_{i-1}}} + \ldots + \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}} \\ \overrightarrow{\Omega_{S/R}} = \overrightarrow{\Omega_{S/R_n}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{R_i/R_{i-1}}} + \ldots + \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \end{cases}$ soit en utilisant la notation torseur cinématique :

$$\boxed{{}_M\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R}} \\ \overrightarrow{V_{M\in S/R}} \end{Bmatrix} = {}_M\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{S/R_n}} \\ \overrightarrow{V_{M\in S/R_n}} \end{Bmatrix} + \ldots + {}_M\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R_i/R_{i-1}}} \\ \overrightarrow{V_{M\in R_i/R_{i-1}}} \end{Bmatrix} + \ldots + {}_M\begin{Bmatrix} \overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \\ \overrightarrow{V_{M\in R_1/R}} \end{Bmatrix}}$$

Soit : $\boxed{\{\mathcal{V}_{S/R}\} = \{\mathcal{V}_{S/R_n}\} + \ldots + \{\mathcal{V}_{R_i/R_{i-1}}\} + \ldots + \{\mathcal{V}_{R_1/R}\}}$

Exemple du manège Magic-Arms : $\{\mathcal{V}_{3/0}\} = \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\} + \{\mathcal{V}_{1/0}\}$

3/0 : mouvement complexe

3/2 : *mouvement de rotation autour de l'axe (O,* $\vec{y}_2$ *)*

2/1 : *mouvement de rotation autour de l'axe (*O_2*,* $\vec{z}$ *)*

1/0 : *mouvement de rotation autour de l'axe (*O_1*,* $\vec{z}$ *)*

4 - Composition des Vecteurs Acceleration

Définition

Soit le solide S en mouvement par rapport au repère R_1 lui-même en mouvement par rapport au repère R. Pour tout point $M \in S$ on montre que :

$$\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}} = \overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_1}} + \overrightarrow{\Gamma_{M\in R_1/R}} + \overrightarrow{\Gamma_{Coriolis}}$$

- $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R}}$ est le vecteur accélération absolue
- $\overrightarrow{\Gamma_{M\in S/R_1}}$ est le vecteur accélération relative
- $\overrightarrow{\Gamma_{M\in R_1/R}}$ est le vecteur accélération d'entrainement
- $\overrightarrow{\Gamma_{Coriolis}} = 2.\overrightarrow{\Omega_{R_1/R}} \wedge \overrightarrow{V_{M\in S/R_1}}$ est le vecteur accélération de Coriolis

Dans la pratique on n'utilise que très rarement (pour ne pas dire jamais) la composition des vecteurs accélération ! On peut s'en servir à la limite comme moyen de vérification, une fois le vecteur accélération calculé par un autre biais.