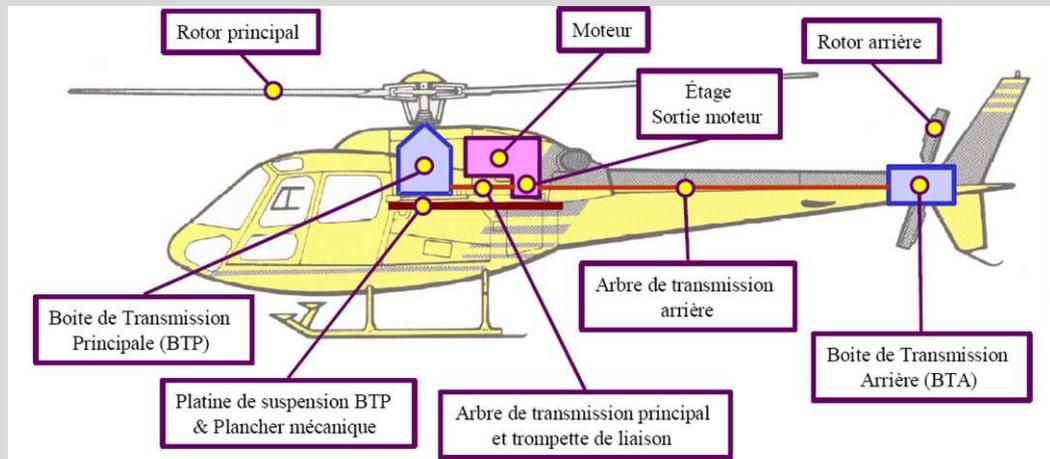


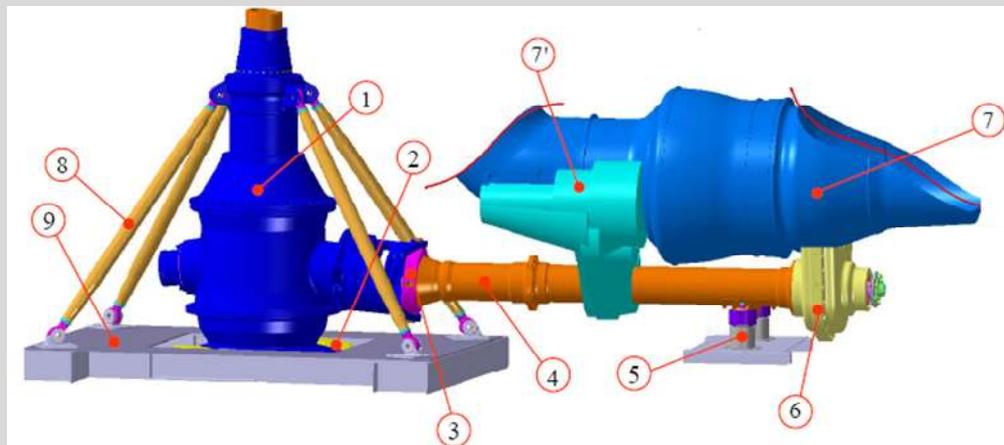
Introduction à la Mécanique du Solide

Exemple de Système Complexe

ENSEMBLE TRANSMISSION DE PUISSANCE DE L'HELICOPTERE ECUREUIL



Repère	Composants
1	Boîte de Transfert Principale (BTP)
2	Platine de suspension BTP
3	Anneau de liaison
4	Trompette de liaison
5	Plots support moteur
6	Carter de liaison moteur trompette
7	Moteur
7'	Equipements moteur
8	Barre de suspension BTP
9	Plancher mécanique



Un système mécanique est généralement constitué d'un ensemble de mécanismes. Ces mécanismes sont composés de solides reliés entre eux par des liaisons dans le but de réaliser une fonction.

Exemple : Dans le cas d'un ensemble de transmission de puissance d'un hélicoptère, deux composants principaux interviennent à la suite du moteur :

- *La boîte de transmission principale (BTP) située sous le rotor principal et proche du moteur qui doit transmettre la puissance du moteur au rotor principal et aux divers équipements.*
- *La boîte de transmission arrière (BTA) située à l'extrémité de la queue de l'appareil qui fournit la puissance du moteur au rotor arrière.*

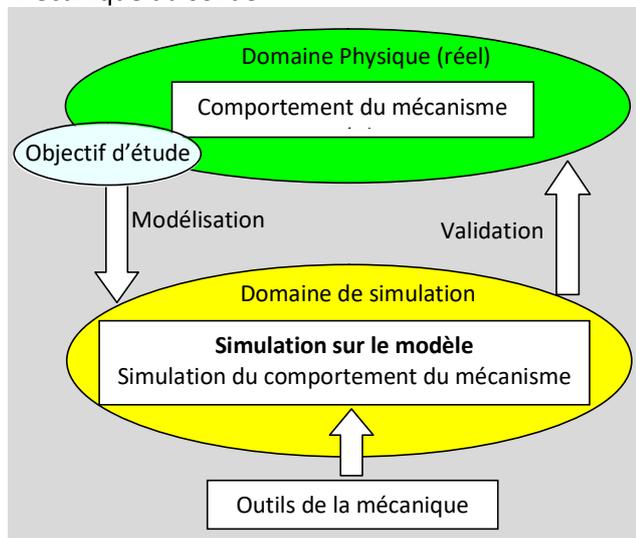
⁽¹⁾ Sur l'exemple du système de transmission de puissance de l'hélicoptère, c'est bien le cas puisqu'on s'aperçoit que la plupart des solutions techniques concernent l'adaptation de la vitesse de rotation ou la transmission du couple.

La puissance moteur est transmise à ces deux systèmes mécaniques par l'intermédiaire de deux arbres de transmission mécaniquement liés afin d'assurer une liaison cinématique permanente entre les deux rotors. La transmission comporte par ailleurs une roue libre afin d'autoriser l'auto rotation des rotors en cas de blocage moteur.

Les fonctions techniques réalisées par les systèmes mécaniques se caractérisent le plus souvent par une ou des lois d'entrée sortie en termes de vitesses ou d'efforts ⁽¹⁾. En SII, la mécanique du solide a notamment pour objet l'étude des lois du mouvement ou d'équilibre de ces systèmes et l'ingénieur a donc pour objectif de comprendre, d'analyser, d'améliorer ou valider les systèmes mécaniques constituant les produits industriels.

1 - RAPPEL DE LA DEMARCHE INGENIEUR EN CPGE

L'objectif de l'ingénieur est d'analyser, améliorer, concevoir ou valider un mécanisme réel. Pour cela, il faut d'abord le modéliser afin de pouvoir lui appliquer ensuite les outils issus de la mécanique du solide.



Le choix du modèle dépend :

- de l'étude que l'on cherche à mener,
- du degré de précision demandé pour cette étude,
- des moyens de calcul disponibles.

Le domaine de validité des lois de la mécanique implique la mise en place d'hypothèses simplificatrices lors de la phase de modélisation.

Plus le modèle est proche du système réel, plus les résultats obtenus seront satisfaisants.

2 - HYPOTHESES FONDAMENTALES

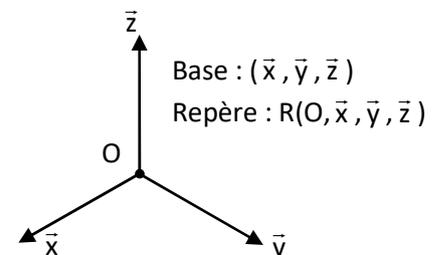
On se place dans un système de référence constitué du temps et d'un espace physique.

Le temps (t) permet de repérer tout instant par la date ⁽²⁾.



L'espace physique ⁽³⁾ est associé à un espace affine euclidien ϵ de dimension 3 dans lequel on définit :

- O : un point de ϵ pris comme origine,
- E : espace vectoriel réel associé à ϵ muni d'une base **b orthonormée directe** (sauf mention contraire explicitement rarissime),
- R(O, b) : un repère de l'espace ϵ .



Le système de référence défini peut être aussi appelé **espace-temps, référentiel, observateur** ou simplement **repère**.

⁽²⁾ unité du Système International : la seconde (s)

⁽³⁾ unité du Système International : le mètre (m)



(4) On se limitera par la suite à appeler « solide » un solide indéformable.



On considère que les pièces mécaniques peuvent être modélisées par des **solides indéformables** (4).

Un solide est dit indéformable lorsque, quels que soient les points A et B de ce solide, la distance AB reste constante au cours du mouvement.

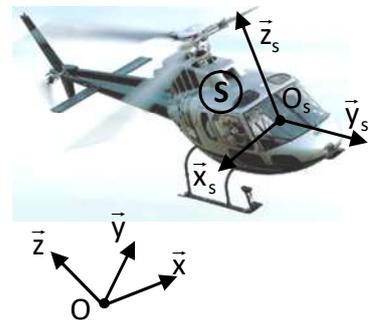


$$\forall A \text{ et } B \in (S), \forall t, \|\vec{AB}\| = \text{cte}$$

Comme le solide est considéré comme indéformable et que la position relative des axes d'un repère est invariante au cours du temps, on peut considérer qu'il y a **équivalence entre le solide et son repère associé**.

3 - PARAMETRAGE DE LA POSITION D'UN SOLIDE PAR RAPPORT A UN REPERE

Pour définir la position d'un solide (S) par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, il faut d'abord commencer par lier à ce solide un repère $R_s(O_s, \vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ et ensuite définir la position du repère R_s par rapport au repère R.

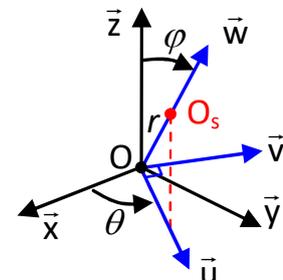
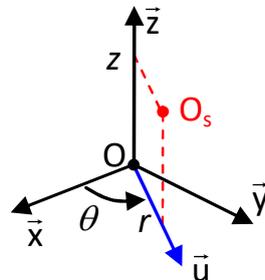
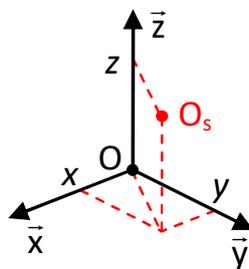


Le repère R_s étant caractérisée par son origine O_s et sa base $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$, il faut d'abord définir la position de l'origine O_s dans R puis l'orientation de la base $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$ de R_s par rapport à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de R.

3.1. Paramétrage de la position de O_s dans R

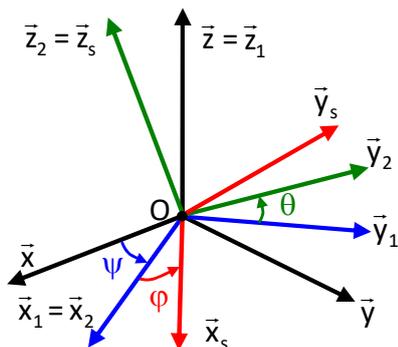
On utilise usuellement 3 types de coordonnées pour définir la position de O_s dans le repère R :

Les coordonnées cartésiennes Les coordonnées cylindriques Les coordonnées sphériques



3.2. Paramétrage de la base de R_s par rapport à la base de R

Il existe d'autres solutions mais on utilise dans le cas général un paramétrage par les angles d'Euler. Ils correspondent à trois rotations planes successives qui permettent de faire coïncider la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec la base $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$.



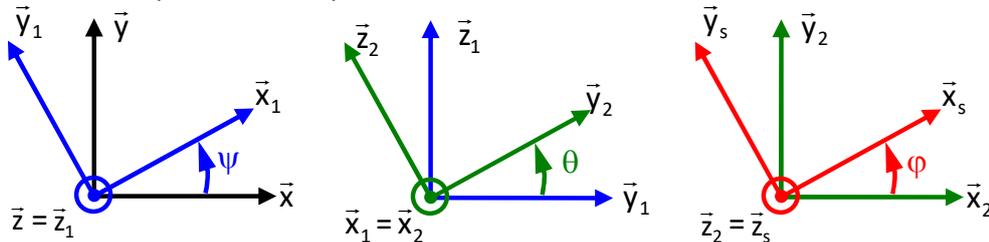
La première rotation est une rotation d'angle ψ autour de l'axe (O, \vec{z}) , ψ est appelé angle de précession. Elle permet de passer de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ vers une base intermédiaire $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$.

La deuxième rotation est une rotation d'angle θ autour de l'axe (O, \vec{x}_1) , θ est appelé angle de nutation. Elle permet de passer de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z})$ vers une seconde base intermédiaire $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$.



La troisième rotation est une rotation d'angle φ autour de l'axe (O, \vec{z}_2) , φ est appelé angle de rotation propre. Elle permet de passer de la base $(\vec{x}_1, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ vers la base $(\vec{x}_s, \vec{y}_s, \vec{z}_s)$.

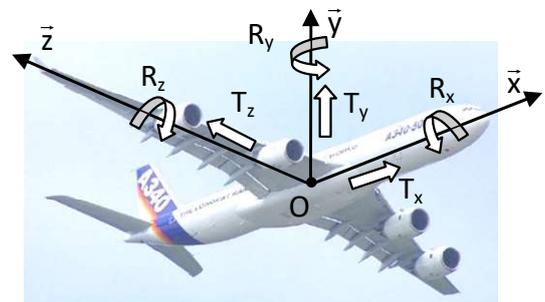
Les figures planes (ou géométrales) sont très utiles pour la résolution des problèmes, elles permettent de poser dans un plan toutes les rotations.



4 - INTRODUCTION AUX LIAISONS : SURFACES ELEMENTAIRES ET HYPOTHESES

Dans l'espace, un solide possède 6 Degrés De Liberté ⁽⁵⁾, Il faut 6 paramètres pour positionner un solide dans l'espace :

- 3 paramètres permettant de positionner un point du solide (homogènes à une longueur)
- 3 paramètres angulaires permettant de définir l'orientation du solide (homogène à une mesure angulaire)



Les liaisons permettent de supprimer un certain nombre de degrés de liberté pour réaliser une fonction. Les différentes liaisons simples s'effectuent à partir de surfaces élémentaires :

⁽⁵⁾ Ces 6 Degrés de Liberté (DDLs) sont les 3 translations : T_x, T_y, T_z et les 3 rotations autour de O : R_x, R_y, R_z .

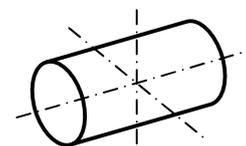
⁽⁶⁾ obtenu généralement par des procédés de fabrication comme le tournage, le fraisage ou le perçage.

⁽⁷⁾ obtenu généralement par des procédés de fabrication comme le lamage, le fraisage ou le tournage.

⁽⁸⁾ obtenu généralement par tournage.

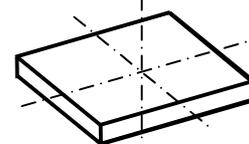
Le cylindre de révolution ⁽⁶⁾

Modèle : cylindricité parfaite (circularité du profil et rectitude), état de surface parfait, diamètre et longueur sans tolérance



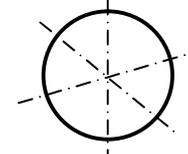
Le plan ⁽⁷⁾

Modèle : planéité, rugosité et dimensions parfaites



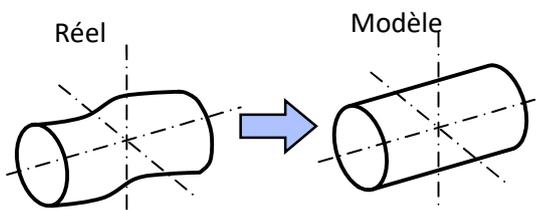
La sphère ⁽⁸⁾

Modèle : rugosité, dimensions parfaites

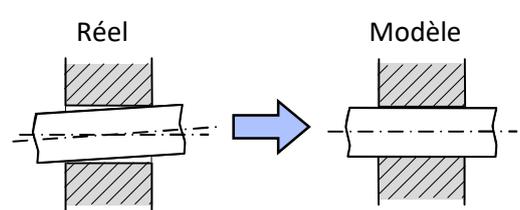


Les modèles de liaison sont généralement basés sur 2 hypothèses :

Hypothèse 1 : géométrie parfaite



Hypothèse 2 : liaison sans jeu





Toutes les liaisons simples sont à connaître par cœur ! D'ailleurs la page entière est à connaître par cœur :/

4.1. Liaisons simples (Association de surfaces élémentaires)

L'association de deux surfaces élémentaires d'un solide (2) et d'un solide (1) permet de contraindre les mouvements de (2)/(1). On les appelle les liaisons simples. On peut les caractériser par les degrés de libertés supprimés ou par les paramètres cinématiques nécessaires pour positionner (2)/(1).

	<p>(2)/(1) : Liaison sphère/plan ou ponctuelle en O de normale (O, \bar{z})</p> <p>On supprime 1 DDL : \mathcal{F}_z</p> <p>Il reste 5 paramètres cinématiques</p>
	<p>(2)/(1) : Liaison linéaire rectiligne d'axe (O, \bar{x}) de normale (O, \bar{z})</p> <p>On supprime 2 DDLs : $\mathcal{F}_z, \mathcal{R}_y$</p> <p>Il reste 4 paramètres cinématiques</p>
	<p>(2)/(1) : Liaison sphère/cylindre ou linéaire annulaire d'axe (O, \bar{x})</p> <p>On supprime 2 DDLs : $\mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z$</p> <p>Il reste 4 paramètres cinématiques</p>
	<p>(2)/(1) : Liaison appui plan de normale (O, \bar{z})</p> <p>On supprime 3 DDLs : $\mathcal{F}_z, \mathcal{R}_x, \mathcal{R}_y$</p> <p>Il reste 3 paramètres cinématiques</p>
	<p>(2)/(1) : Liaison sphère/sphère ou rotule en O</p> <p>On supprime 3 DDLs : $\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z$</p> <p>Il reste 3 paramètres cinématiques</p>
	<p>(2)/(1) : Liaison pivot glissant d'axe (O, \bar{x})</p> <p>On supprime 4 DDLs : $\mathcal{F}_y, \mathcal{F}_z, \mathcal{R}_x, \mathcal{R}_z$</p> <p>Il reste 2 paramètres cinématiques</p>



De même toutes les liaisons composées sont à connaître par cœur ! La page entière est donc aussi à connaître par cœur !/

4.2. Liaisons composées (à un degré de liberté)

La combinaison en parallèle des liaisons simples permet d'accéder à des liaisons composées.

Symbole

3D $\vec{z}_1 = \vec{z}$

2D $\vec{x}_1 = \vec{x}$

(2)/(1) : Liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_1)

On supprime 5 DDLs : $T_x/T_y/T_z/R_x/R_z$

Il reste 1 paramètre cinématique

Définition du paramètre :

$\theta = \theta_{x,2/1} = (\vec{y}_1, \vec{y}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$

avec $\vec{x}_1 = \vec{x}_2$

Symbole

3D $\vec{z}_1 = \vec{z}$

2D $\vec{x}_1 = \vec{x}$

(2)/(1) : Liaison glissière d'axe (O, \vec{x}_1)

On supprime 5 degrés de liberté : $T_x/T_z/R_x/R_y/R_z$

Il reste 1 paramètre cinématique

Définition du paramètre :

$\lambda = \lambda_{x,2/1}$

(O, \vec{z}_1)

Définition des paramètres :

Symbole

3D \vec{z}_1

2D \vec{x}_1

(2)/(1) : Liaison hélicoïdale d'axe (O, \vec{x}_1)

On supprime 4 degrés de liberté : $T_x/T_z/R_y/R_z + 1$ relation de dépendance entre T_x et R_x

Il reste 1 paramètre cinématique indépendant

Relation de dépendance :

$\lambda_{2/1} = \theta_{2/1} \cdot \text{pas} / (2\pi)$ pour un filet à droite

5 - AGENCEMENT DES LIAISONS ET PARAMETRAGE : INTRODUCTION

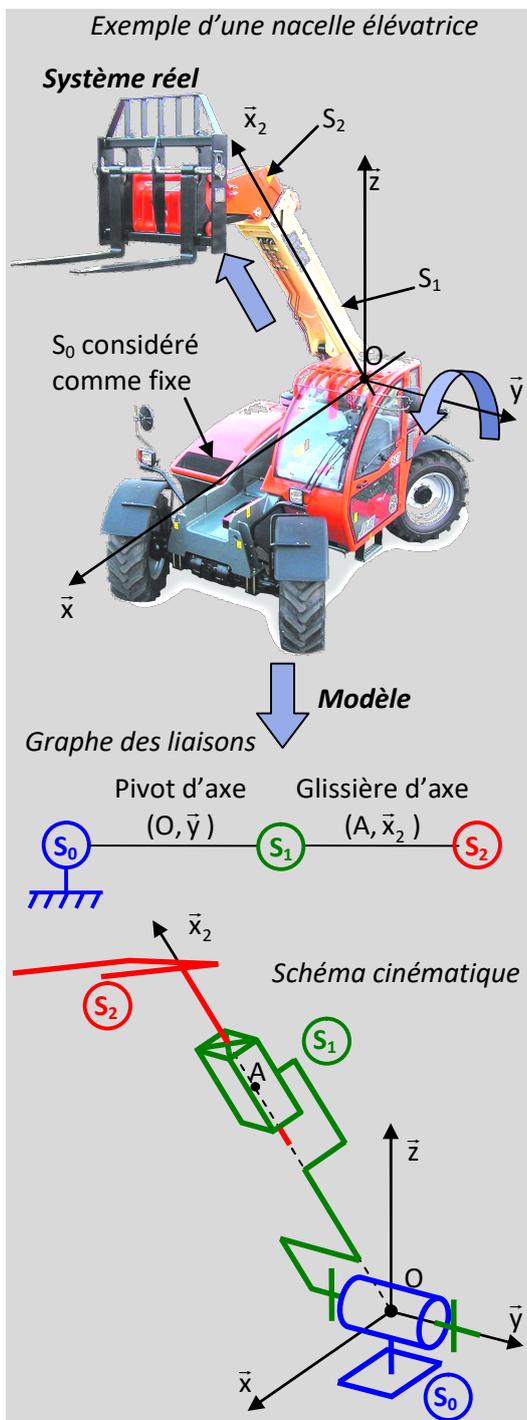
L'ensemble des liaisons dans un mécanisme permet d'établir des relations entre les différents paramètres cinématiques définis précédemment. On distingue deux grandes familles d'agencement des liaisons :

5.1. Les chaînes cinématiques ouvertes

Type bras de manipulation⁽⁹⁾

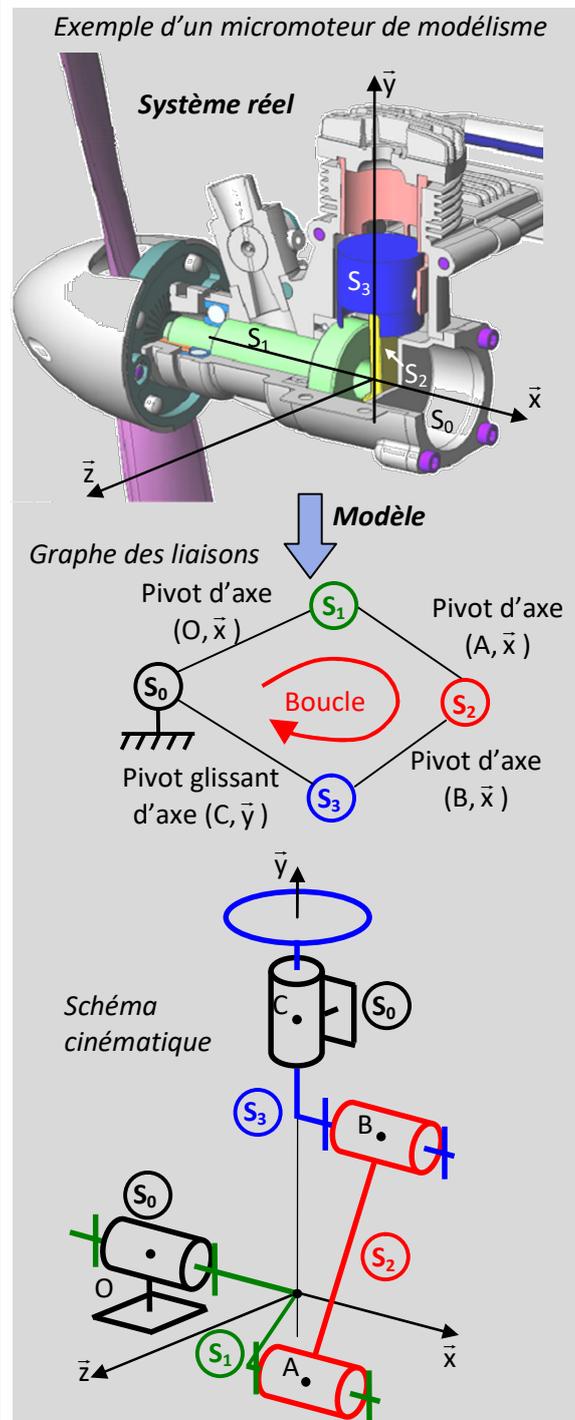
⁽⁹⁾ Dans ce cas, la relation demandée concerne souvent un point en bout de chaîne.

⁽¹⁰⁾ Dans ce cas, la relation demandée concerne souvent la loi d'entrée/sortie du mécanisme.



5.2. Les chaînes cinématiques fermées

Type mécanismes de transformation de mouvements⁽¹⁰⁾



5.3. Le schéma cinématique minimal

L'outil de schématisation permettant de visualiser les différents mouvements dans le mécanisme étudié ainsi que le paramétrage est le schéma cinématique minimal.

⁽¹¹⁾ Il serait en effet inutile et fastidieux de considérer individuellement toutes les pièces sans commencer par regrouper celles qui sont liées (sans mouvement relatif).

⁽¹²⁾ Deux questions à ce stade sont utiles :
 - Quelle est la nature des surfaces en contact entre les solides ?
 - Quels sont les mouvements relatifs possibles entre les solides ?

⁽¹³⁾ Le graphe des liaisons peut s'avérer un outil intéressant :
 - pour aider à définir correctement chaque liaison (définition géométrique)
 - pour aider à conduire une étude dynamique ou statique (identification des actions mécaniques, démarche d'isolement)

⁽¹⁴⁾ Lorsque l'on demande d'élaborer un schéma cinématique, le paramétrage est souvent déjà défini dans l'énoncé. Ces données peuvent constituer une aide parfois précieuse !

L'élaboration d'un schéma cinématique minimal s'appuie sur la démarche suivante :

On identifie tous les regroupements possibles de pièces ⁽¹¹⁾ : Classes d'Equivalence Cinématiques (CEC).



Entre chaque CEC, on s'interroge sur la nature des mouvements entre CEC puis on identifie le modèle de liaison correspondant au mieux aux mouvements entre les CEC concernées ⁽¹²⁾.
 Rappel : les liaisons normalisées utilisées à ce stade sont construites avec les hypothèses : géométrie des surfaces parfaite et liaison sans jeu.



Eventuellement on s'appuie sur le graphe des liaisons pour définir chaque liaison ⁽¹³⁾.



On élabore le schéma cinématique minimal en s'appuyant sur le graphe des liaisons (définition géométrique) et sur les représentations normalisées des différents composants technologiques (engrenages, roues de friction, ...) ⁽¹⁴⁾



A partir du schéma cinématique, on peut définir les mobilités du mécanisme ainsi que les degrés de liaison surabondants.

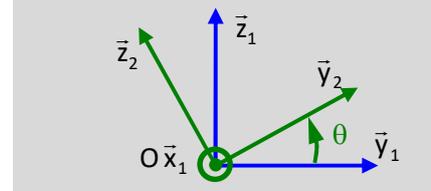
Mobilité interne m_i : nombre de paramètres cinématiques ne participant pas au mouvement du système.

Mobilité utile m_u : nombre de paramètres cinématiques indépendants.

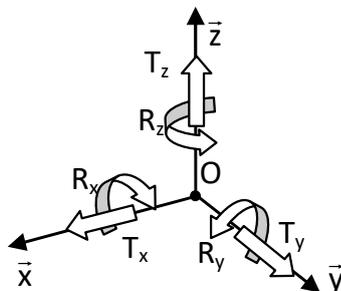
A partir du schéma cinématique, on peut définir les paramètres cinématiques (si c'est demandé bien sûr !!)

Ils sont donnés algébriquement

Ex : Liaison pivot d'axe (O, \vec{x}_1) et de paramètre θ



5.4. Détermination des paramètres cinématiques



Pour définir la position du solide (2)/(1), on retrouve deux types de paramètres :

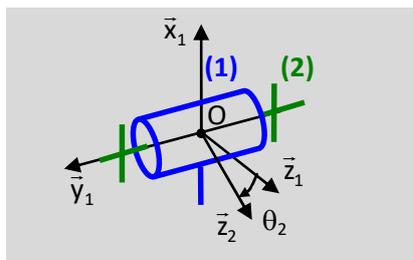
- le paramètre de translation (par exemple λ)
- le paramètre de rotation (par exemple θ)

Ils sont donnés algébriquement.



Il est indispensable de représenter ces paramètres sur des figures géométrales !

Méthode de construction d'une figure plane



On identifie l'axe de la liaison⁽¹⁵⁾

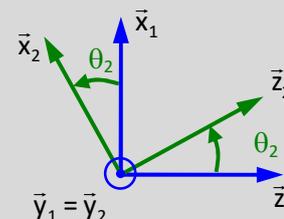
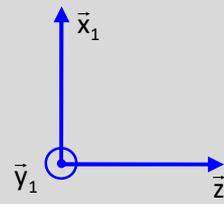
On trace le repère de référence⁽¹⁶⁾

3/ On identifie le paramètre angulaire (de quel axe part il ? sur quel axe arrive t'il ?) et on trace l'autre repère

Sur l'exemple, il s'agit d'une liaison pivot d'axe (O, \vec{y}_1)



Sur l'exemple, on trace le repère 1 et l'axe \vec{y}_1 venant vers nous, \vec{x}_1 et \vec{z}_1 sont forcément positionnés comme sur la figure (sens direct)



Sur l'exemple, on ne se soucie pas de la valeur de l'angle représenté sur le schéma en perspective de la liaison (négatif ici). On représente cet angle indépendamment de sa valeur et de son signe⁽¹⁷⁾.

⁽¹⁵⁾ Il est conseillé de toujours représenter cet axe venant vers vous



⁽¹⁶⁾ Il est **IMPERATIF** que le repère ainsi tracé soit orthonormé direct



⁽¹⁷⁾ Il est **IMPERATIF** que le paramètre angulaire soit représenté dans le premier cadran compris entre 0 et $\pi/2$

Le système est une chaîne cinématique ouverte et il est défini cinématiquement avec 2 paramètres indépendants α et λ .

Si rien n'est précisé dans l'énoncé, les paramètres sont algébriques. Les angles sont alors définis sur les figures 2D positifs dans le premier cadran (entre 0 et $\pi/2$). C'est le cas ici pour le paramètre α .

5.5. Exemple : schématisation et paramétrage d'une nacelle élévatrice

