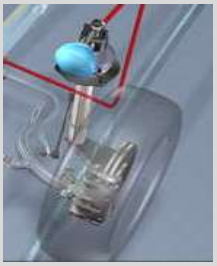
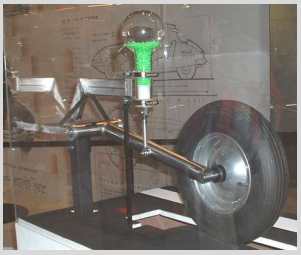
Réponse Temporelle des Systèmes du 2nd Ordre

Exemple de Système Complexe

SUSPENSION ACTIVE HYDROPNEUMATIQUE





Le rôle d'une suspension est de filtrer les irrégularités de la route et d'amortir les mouvements verticaux pour ne pas les transmettre à la caisse du véhicule. La particularité de la suspension active hydropneumatique est d'être une suspension asservie qui évolue suivant les besoins d'amortissement du véhicule lors des phases de conduite.

1 - DEFINITION

Un système physique d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** est du 2nd ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 2nd ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{\omega_0^2}.\frac{d^2s(t)}{dt^2}+2\frac{z}{\omega_0}.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)$$

où K = gain statique du système [1]
z = coefficient d'amortissement [2].
ω_0 = pulsation propre non amortie du système [3]

[1] unité : [unité de sortie] / [unité d'entrée]
[2] z>0 et sans unité
[3] ω_0 >0 en radians/secondes

Si les **conditions initiales sont nulles** [4], la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit $(\frac{1}{\omega_0^2}p^2+\frac{2.z}{\omega_0}p+1).S(p)=K.E(p)$, soit :

[4] conditions de Heaviside

$$G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\frac{2.z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^2}p^2}=\frac{K.\omega_0^2}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^2}$$

2 - RECHERCHE DES POLES DE LA FONCTION DE TRANSFERT

Le comportement dynamique du système est toujours entièrement défini par les pôles et les zéros de la fonction de transfert [5].

[5] voir cours 04 paragraphe 5.3.

Pour des fonctions de transfert complexes, il est donc judicieux de calculer au préalable les valeurs des pôles de la fonction de transfert du système puis de tracer la position de ces pôles dans le plan complexe afin d'étudier, dans un second temps, la réponse du système à des entrée types.

Dans le cas des systèmes du second ordre, la fonction de transfert G(p) ne possède qu'un seul polynôme (d'ordre 2 : $p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^2$) au niveau du dénominateur, il n'y a donc aucun zéro sur cette fonction de transfert et on retrouve 2 pôles (p_1 et p_2 qui sont les deux racines du dénominateur).

Le dénominateur $p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^2$ peut donc s'écrire sous la forme $(p-p_1).(p-p_2)$.

Calcul de la valeur des pôles p_1 et p_2 et représentation dans le plan complexe :

Racines du polynôme : $p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0{}^2 \rightarrow \Delta=4.z^2.\omega_0{}^2-4.\omega_0{}^2=4.\omega_0{}^2.(z^2-1)$

$\Delta=b^2-4.a.c$ (avec ici a = 1; b = $2.z.\omega_0$ et c = $\omega_0{}^2$)

Les pôles de la fonction de transfert dépendent donc de la valeur de z, il y a 3 cas de figure possibles :

- **Cas z > 1 → Δ > 0**

$$\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=-z.\omega_0\pm\omega_0.\sqrt{(z^2-1)}$$

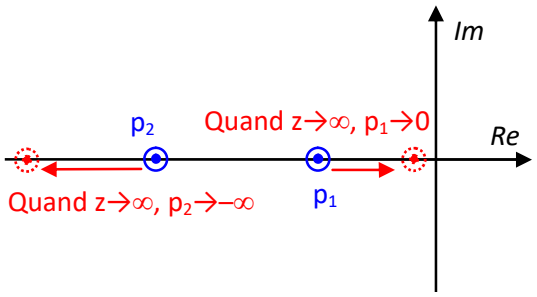
d'où :

$$p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0{}^2=(p-p_1).(p-p_2) \text{ avec :}$$

$$\left.\begin{matrix}p_1=-z.\omega_0+\omega_0.\sqrt{(z^2-1)}\\p_2=-z.\omega_0-\omega_0.\sqrt{(z^2-1)}\end{matrix}\right\}$$ 2 pôles réels négatifs

Remarque : $p_1.p_2=\omega_0{}^2$

Représentation dans le plan complexe :



Cas particulier : Représentation des pôles correspondant à z infini.

- **Cas z = 1 → Δ = 0**

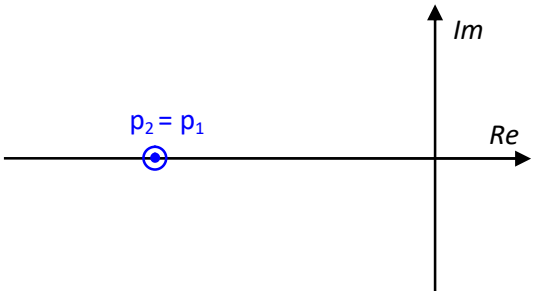
$$\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=-\omega_0 \text{ d'où :}$$

$$p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0{}^2=(p-p_1)^2=(p-p_2)^2$$

avec :

$$\left.\begin{matrix}p_1=-\omega_0\\p_2=-\omega_0\end{matrix}\right\}$$ 2 pôles réels confondus

Représentation dans le plan complexe :



- **Cas z < 1 → Δ < 0** → on pose $\Delta=4.\omega_0{}^2.j^2.(1-z^2)$

$$\begin{matrix}p_1\\p_2\end{matrix}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}=-z.\omega_0\pm j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)}$$

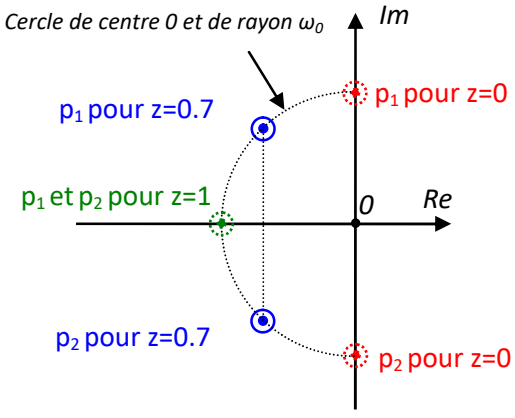
d'où :

$$p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0{}^2=(p-p_1).(p-p_2) \text{ avec :}$$

$$\left.\begin{matrix}p_1=-z.\omega_0+j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)}\\p_2=-z.\omega_0-j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)}\end{matrix}\right\}$$ 2 pôles complexes conjugués

$$|p_1|=|p_2|=\sqrt{Re^2+Im^2}=\omega_0$$

Représentation dans le plan complexe :



Cas particuliers : pôles correspondant à z=0, z=0.7 et z=1.

3 - REPONSE A UN ECHELON

L'entrée est définie par un échelon **e(t) = a.u(t)**, soit dans le domaine de Laplace, $E(p) = \frac{a}{p}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p) = \frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2}$

- **Pente à l'origine de la courbe de sortie s(t) :**

$$s'(0^+) = \lim_{t\to 0^+} s'(t) = \lim_{p\to\infty} p.[p.S(p)] = \lim_{p\to\infty} p^2.\frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2} = 0 \rightarrow$$ **Pente à l'origine = 0**

Théorème de la valeur initiale — *Transformée de la dérivée (CI nulles)* — *La tangente à l'origine est une droite horizontale* [6]

[6] ce qui est différent du système du 1er ordre !!

- **Ordonnée en $+\infty$ de la courbe de sortie s(t) :**

$$s(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p.S(p) = \lim_{p\to 0} \frac{K.a.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2} = K.a \quad \rightarrow \quad \boxed{s(+\infty) = K.a}$$

Théorème de la valeur finale

Le régime établi ne dépend que du gain statique K alors que z et ω_0 n'interviennent que sur le régime transitoire

3.1. Réponse à un échelon pour z > 1

Il y a dans ce cas 2 pôles réels négatifs p_1 et p_2, la décomposition en éléments simples donne :

$$S(p) = \frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2} = \frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1).(p-p_2)}$$

$$\rightarrow S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p-p_1} + \frac{\delta}{p-p_2} \text{ avec}$$

$$\alpha = \frac{K.a.\omega_0^2}{p_1.p_2} = K.a \; ; \; \beta = \frac{K.a.\omega_0^2}{p_1.(p_1-p_2)} = \frac{K.a.p_2}{p_1-p_2} \text{ et}$$

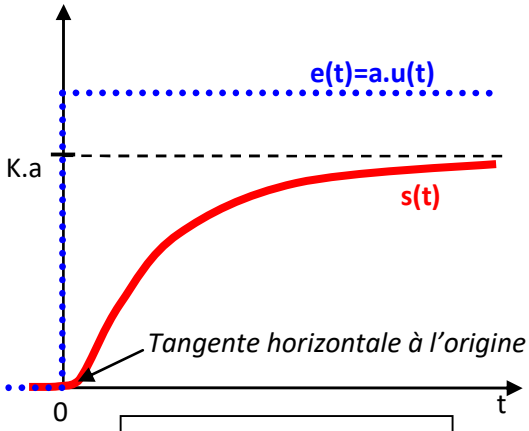
$$\delta = \frac{K.a.\omega_0^2}{p_2.(p_2-p_1)} = \frac{K.a.p_1}{p_2-p_1}$$

La réponse temporelle **s(t)** a donc pour expression :

$$s(t) = K.a.\left(1 + \frac{p_2}{p_1-p_2}.e^{p_1 t} + \frac{p_1}{p_2-p_1}.e^{p_2 t}\right).u(t)$$

Régime permanent — *Régime transitoire*

Représentation graphique pour z > 1 et K < 1



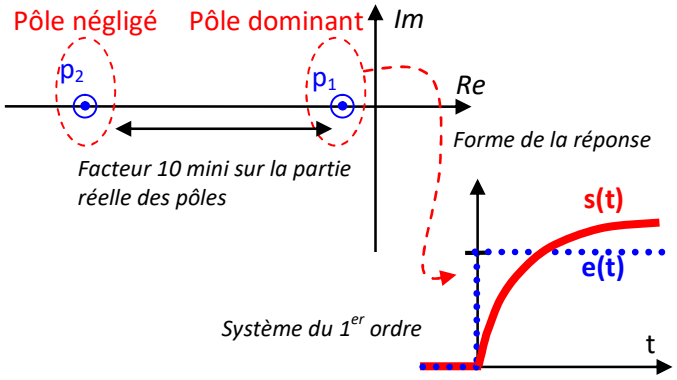
Système amorti
Réponse apériodique

Lorsque z>1, il est plus judicieux d'écrire la fonction de transfert en utilisant une écriture privilégiant les pôles de celle-ci, soit $S(p) = \frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1).(p-p_2)} = \frac{a}{p}.\frac{K}{(1+\tau_1.p).(1+\tau_2.p)}$ où τ_1 et τ_2 sont les constantes de temps du système telles que $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$ et $\tau_2 = -\frac{1}{p_2}$.

La technique est complexe à ce stade de l'année mais on exploite principalement cette notation pour réaliser une **identification** à partir d'un tracé expérimental d'un système modélisable par un système d'ordre 2 sans dépassement.

Quand z devient >>1, on peut négliger le pôle à gauche du pôle dominant s'il existe au moins un facteur 10 sur la partie réelle entre les deux pôles (ici p_1 et p_2).

Dans ce cas, seul le **pôle dominant** caractérise la forme de la réponse.



La réponse du système devient alors, si on néglige p_2, une réponse du type 1er ordre de constante de temps $\tau_1 = -\frac{1}{p_1}$.

3.2. Réponse à un échelon pour z = 1

Il y a dans ce cas 2 pôles réels négatifs confondus $p_1 = p_2 = -\omega_0$ et la décomposition en éléments simples donne :

$$S(p) = \frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{(p-p_1)^2} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p-p_1} + \frac{\delta}{(p-p_1)^2}$$

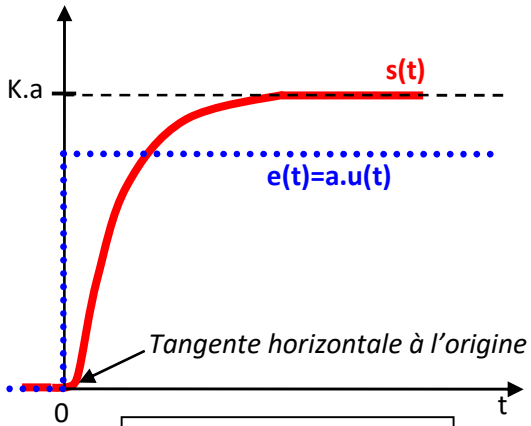
avec : $\alpha = K.a$; $\beta = -K.a$; $\delta = -K.a.\omega_0$

La réponse temporelle **s(t)** a donc pour expression :

$$s(t) = K.a.\left(1 - e^{-\omega_0.t} - \omega_0.t.e^{-\omega_0.t}\right)u(t)$$

Régime permanent — *Régime transitoire*

Représentation graphique pour z = 1 et K > 1



Amortissement critique
Réponse apériodique

3.3. Réponse à un échelon pour z < 1

Il y a dans ce cas 2 pôles complexes conjugués p_1 et p_2 :

$$p_1 = -z.\omega_0 + j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)}$$
$$p_2 = -z.\omega_0 - j.\omega_0.\sqrt{(1-z^2)}$$

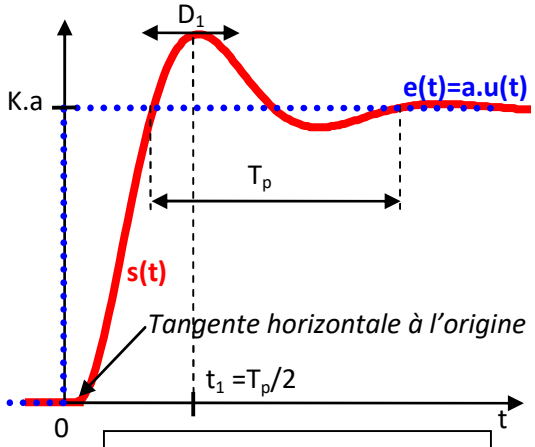
La décomposition en élément simples de l'expression de la sortie S(p) donne :

$$S(p) = \frac{a}{p}.\frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2}$$
$$= K.a.\left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2.z.\omega_0}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2}\right)$$

Puis en faisant apparaitre un carré au dénominateur :

$$S(p) = K.a.\left(\frac{1}{p} - \frac{p + 2.z.\omega_0}{(p + z.\omega_0)^2 + \omega_0^2.(1-z^2)}\right)$$

Représentation graphique pour z < 1 et K = 1



Système sous amorti
Réponse pseudo-périodique

Puis en posant $\omega_p = \omega_0.\sqrt{(1-z^2)}$, on a : $S(p) = K.a.\left(\frac{1}{p} - \frac{p+2.z.\omega_0}{(p+z.\omega_0)^2 + \omega_p{}^2}\right)$

Soit : $S(p) = K.a.\left(\frac{1}{p} - \frac{p+z.\omega_0}{(p+z.\omega_0)^2 + \omega_p{}^2} - \frac{z.\omega_0}{(p+z.\omega_0)^2 + \omega_p{}^2}\right)$

La réponse temporelle **s(t)** a pour expression :

$$s(t) = K.a.\left(1 - e^{-z.\omega_0.t}.\cos(\omega_p.t) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.e^{-z.\omega_0.t}.\sin(\omega_p.t)\right).u(t)$$

Régime permanent *Régime transitoire*

- **Pseudo-période :**

La réponse présente des oscillations amorties de période : $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

- **1er dépassement :**

Le premier maximum (ou dépassement) apparait à $t_1 = \frac{T_p}{2} = \frac{\pi}{\omega_p}$.

La valeur relative du 1er dépassement D_1 correspond à $D_1 = \left|\frac{s(t_1)-s(\infty)}{s(\infty)-s(0)}\right|$ avec :

$$s(t_1) = s(\frac{\pi}{\omega_p}) = K.a.\left(1 - e^{-z.\omega_0.\frac{\pi}{\omega_p}}.\cos(\omega_p.\frac{\pi}{\omega_p}) - \frac{z}{\sqrt{1-z^2}}.e^{-z.\omega_0.\frac{\pi}{\omega_p}}.\sin(\omega_p.\frac{\pi}{\omega_p})\right).u(t)$$

$$s(t_1) = K.a.\left(1 + e^{-\frac{z.\omega_0.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-z^2}}}\right).u(t) = K.a.\left(1 + e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}\right).u(t)$$

D'où : $D_1 = \left|\frac{s(t_1)-s(\infty)}{s(\infty)-s(0)}\right| = \left|\frac{K.a.\left(1 + e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}\right) - K.a}{K.a}\right|$ Soit : $D_1 = e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$

- La valeur relative du 1er dépassement D_1 (et des autres dépassements) s'exprime en %.
- La **valeur du dépassement ne dépend que de la valeur de z**. On utilise cette particularité pour identifier z à partir d'un tracé expérimental, modélisable par la réponse indicielle avec dépassement d'un système d'ordre 2.
- Un abaque est souvent utilisé pour réaliser cette identification (annexe 1).

3.4. Temps de réponse à 5% et temps de réponse réduit

Il n'existe pas de formule simple pour calculer le temps de réponse à 5% car il dépend de la valeur du coefficient d'amortissement z et de la pulsation propre non amortie du système ω_0.

Le temps de réponse à 5% correspond à la durée au delà de laquelle la réponse s(t) reste comprise entre 0.95 et 1.05 fois la valeur de la réponse en régime permanent ($s(+\infty)$).

On utilise un abaque (annexe 2) qui donne la valeur du temps de réponse réduit $t_{5\%}.\omega_0$ en fonction du coefficient d'amortissement z. Elle permet aussi l'identification de ω_0 sur un tracé expérimental modélisable par la réponse indicielle avec dépassement d'un système d'ordre 2.

Le temps de réponse minimum est obtenu pour un dépassement relatif de 5% ce qui correspond à un coefficient d'amortissement de z = 0,69 ≈ 0,7.

On a alors $t_{5\%}.\omega_0 = 3$ pour z=0,7.

A l'aide des annexes 1 et 2 compléter le tableau correspondant aux courbes des réponses indicielles de l'annexe 3 (ω_0=2rad/s sur cet exemple) :

Valeur de z	z=2	z=1	z=0,9	z=0,7	z=0,5	z=0,3	z=0,1	z=0,01
D_1 en %	0	0	<1	≈5	≈16	≈38	≈73	≈100
$t_{5\%}.\omega_0$	≈10.5	5	4	3	≈5,2	8	≈30	≈300
$t_{5\%}$ en s	≈5.25	2.5	2	1.5	≈2.6	4	≈15	≈150

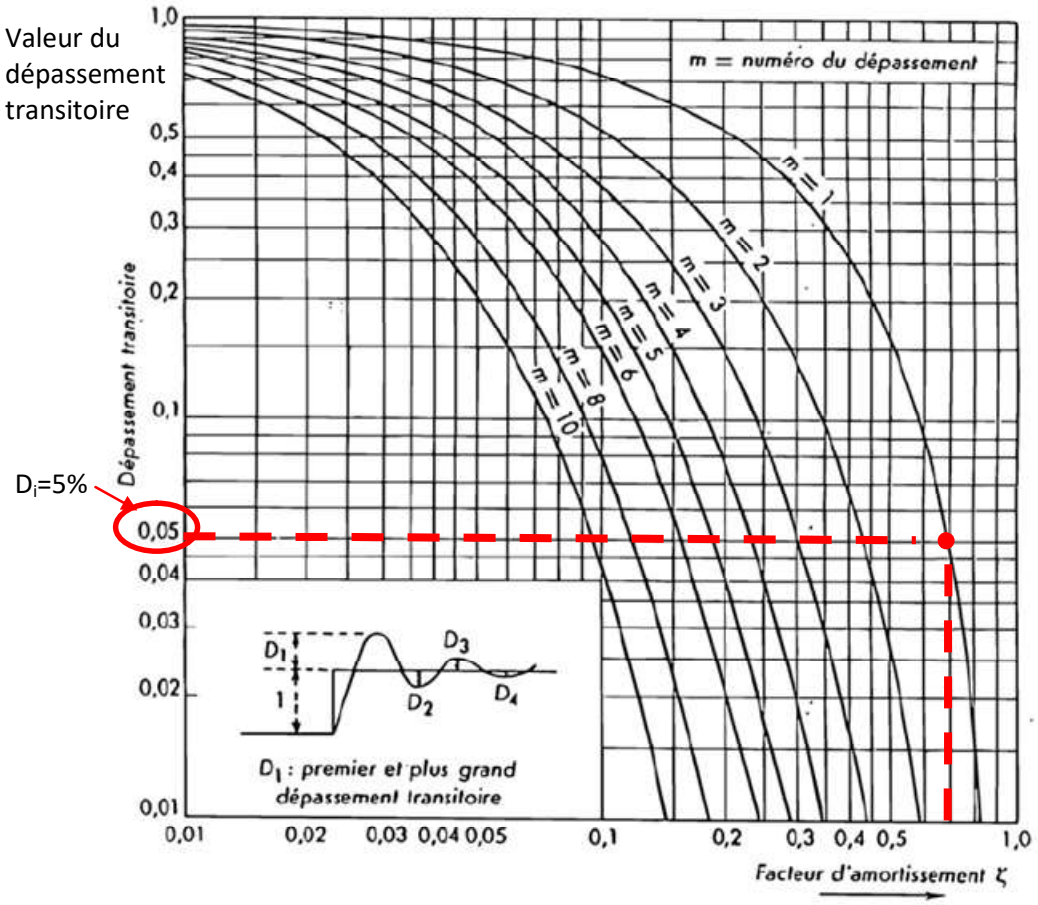
Pour une même pulsation propre non amortie ω_0 et :

- pour z<<1 (amortissement faible), les oscillations sont mal amorties et le temps de réponse est grand.
- pour **z≈0.7**, le système présente un **dépassement D faible (D_1= 5%) avec le temps de réponse le plus faible**.
- pour **z=1**, le système présente le **temps de réponse le plus faible pour une réponse sans dépassement**.
- pour z>>1, il n'y a pas de dépassement mais le système est hyper amorti donc le temps de réponse est très grand.

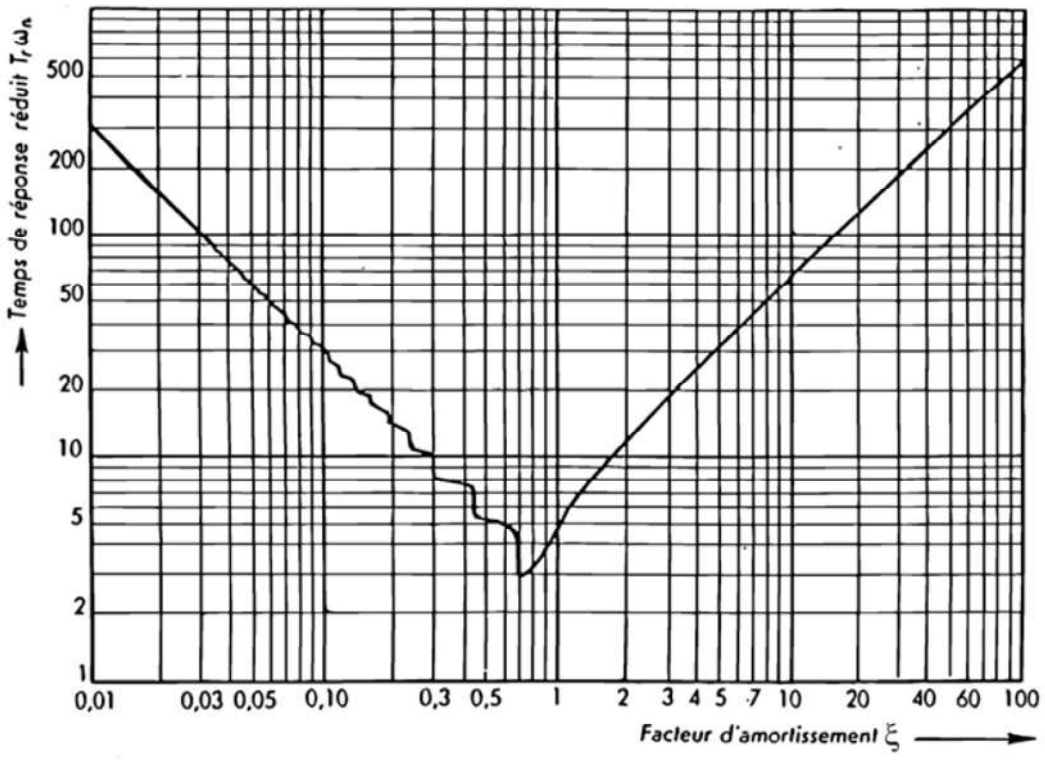
Pour un même coefficient d'amortissement z, plus ω_0 augmente plus le temps de réponse à 5% diminue, donc plus le système est rapide.

Pour z≈0,7 on ne remarque qu'un seul dépassement visible qui vaut 5%

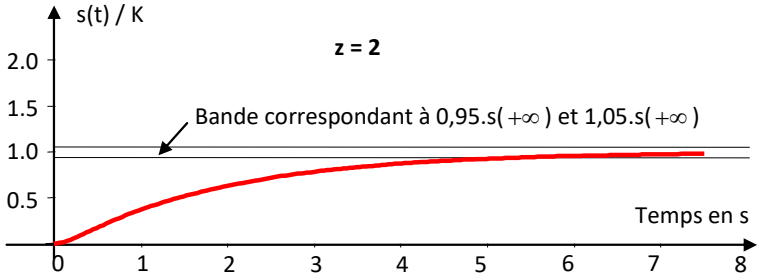
Pour z>0,82 il existe des dépassements mais qui ne sont pas visibles à l'œil (ils sont inférieurs à 1%)

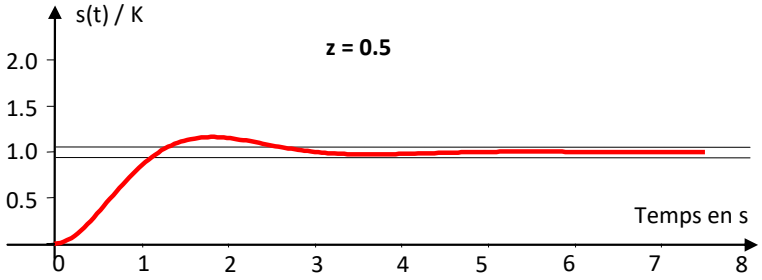


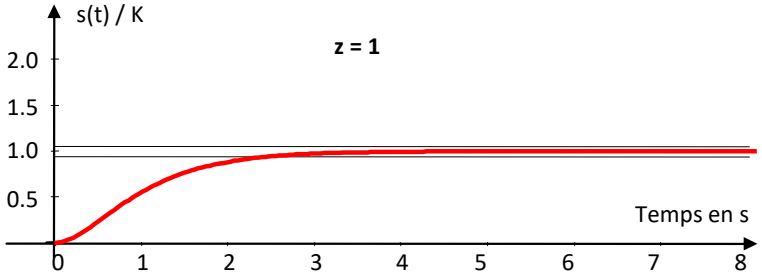
Annexe 1. Valeurs des dépassements relatifs

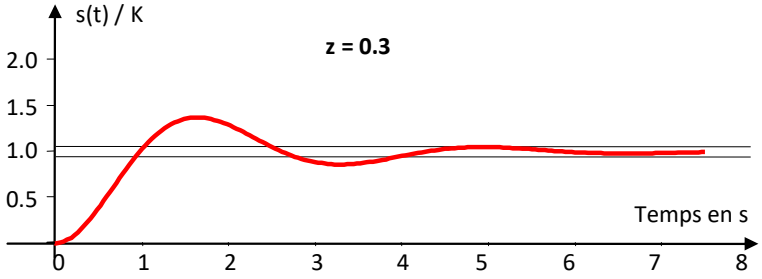


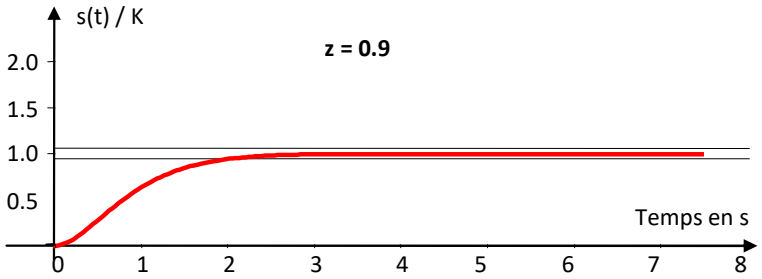
Annexe 2. Temps de réponse réduit

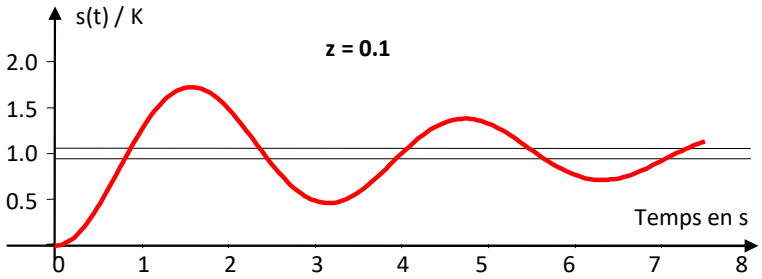


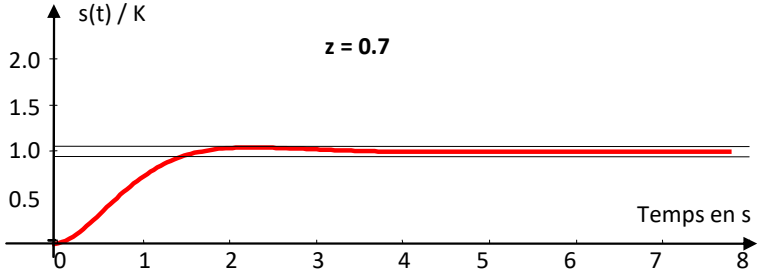


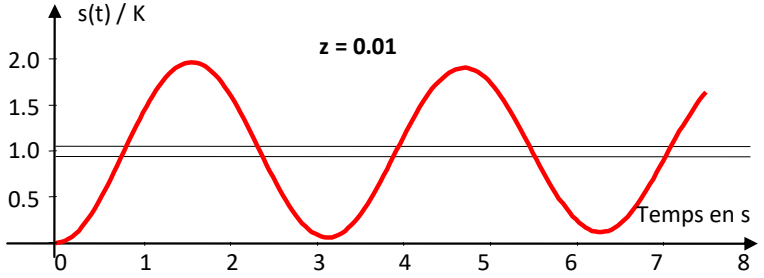












Florestan MATHURIN