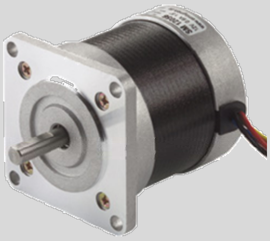
Réponse Temporelle des Systèmes du 1er Ordre

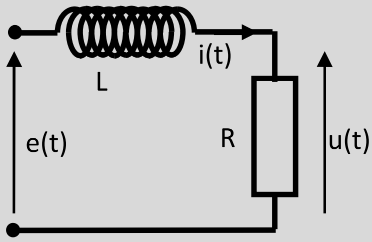
Exemple de Système Complexe

MOTEUR PAS A PAS

Réel



Modèle



Moteur pas à pas se comportant comme un circuit RL

Attention : Normalement, il ne faut jamais ouvrir un moteur pas à pas sous peine de détériorer les aimants irrémédiablement …

Schéma électrique du circuit RL

1 - DEFINITION

Un système physique d'entrée **e(t)** et de sortie **s(t)** est du 1er ordre, s'il est régi par une équation différentielle du 1er ordre à coefficients constants :

$$\boxed{\tau.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)}$$

où : K est le gain statique du système ([unité de sortie]/[unité d'entrée])
τ est la constante de temps (secondes).

[1] (conditions de Heaviside)

Si les **conditions initiales sont nulles** [1], la fonction de transfert dans le domaine de Laplace s'écrit $(\tau.p+1).S(p)=K.E(p)$, soit :

$$\boxed{G(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+\tau.p}}$$

2 - REPONSE IMPULSIONNELLE

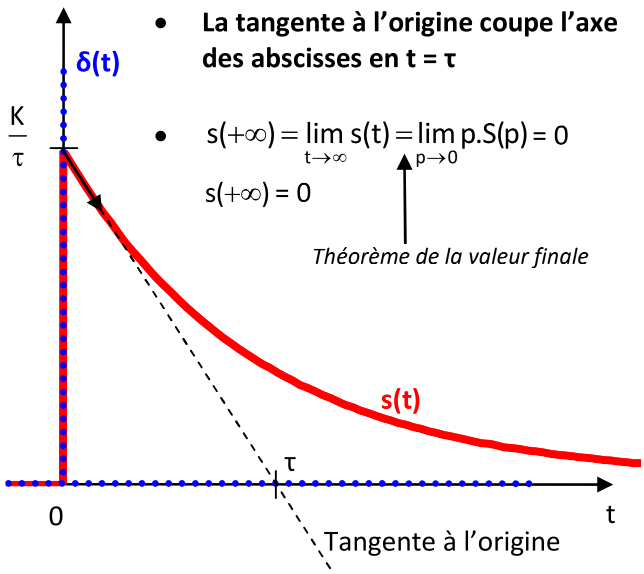
L'entrée est définie par une impulsion de Dirac, **e(t)=δ(t)**, soit dans le domaine de Laplace, E(p)=1.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :

$$S(p)=\frac{K}{1+\tau.p}=\frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p}$$

Soit : $S(p)=\dfrac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p}$

La réponse temporelle a donc pour expression : $\boxed{s(t)=\frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}.u(t)}$



- **La tangente à l'origine coupe l'axe des abscisses en t = τ**
- $s(+\infty)=\lim_{t\to\infty}s(t)=\lim_{p\to 0}p.S(p)=0$

  $s(+\infty)=0$

  Théorème de la valeur finale

(2) Si l'échelon est unitaire, on parle de réponse indicielle

3 - REPONSE A UN ECHELON (2)

3.1. Calcul et représentation graphique

L'entrée est définie par un échelon, **e(t) = a.u(t)**, soit dans le domaine de Laplace, $E(p)=\dfrac{a}{p}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace :

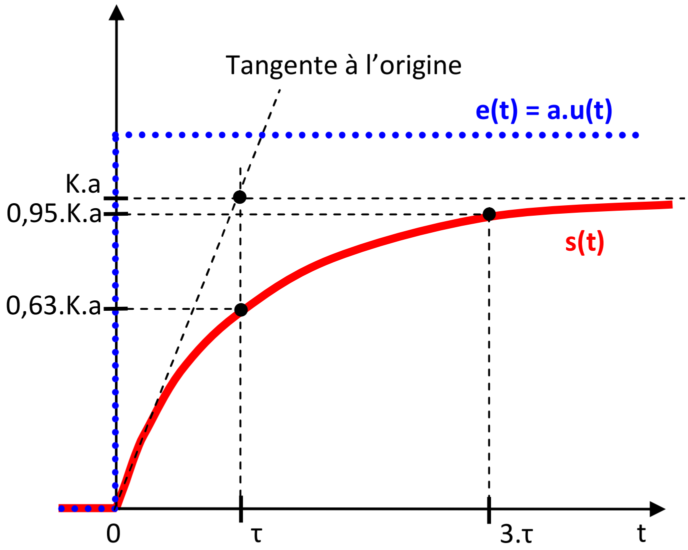
$$S(p)=\frac{K.a}{p.(1+\tau.p)}$$

La décomposition en éléments simples donne :

$$S(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{1+\tau.p}=\frac{K.a}{p}-\frac{K.a.\tau}{1+\tau.p}$$

La réponse temporelle a donc pour expression : $\boxed{s(t)=K.a.\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)}$

Représentation graphique pour K<1



- **Ordonnée en $+\infty$ de la courbe de sortie s(t) :**

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty}s(t)=\lim_{p\to0}p.S(p)=K.a \quad\longrightarrow\quad \boxed{s(+\infty)=K.a}$$

Théorème de la valeur finale

- **Pente à l'origine de la courbe de sortie s(t) :**

$$s'(0^+)=\lim_{t\to0^+}s'(t)=\lim_{p\to\infty}p.[p.S(p)]=\lim_{p\to\infty}p^2.\frac{K.a}{p.(1+\tau.p)}=\lim_{p\to\infty}\frac{K.a}{\frac{1}{p}+\tau}=\frac{K.a}{\tau}$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

On simplifie les p^2 au numérateur et au dénominateur

$\boxed{\text{Pente à l'origine} = \dfrac{K.a}{\tau}}$

- **Temps de réponse à 5%, $t_{5\%}$:**

On cherche $t_{5\%}$ tel que $s(t_{5\%})=0,95.s(+\infty)=0,95.K.a$ Soit $K.a.\left(1-e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}}\right)=0,95.K.a$

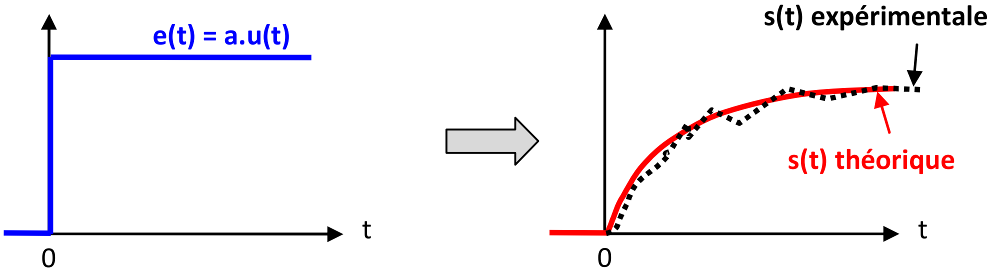
$\rightarrow -e^{-\frac{t_{5\%}}{\tau}}=-0,05 \rightarrow t_{5\%}=-\ln(0,05).\tau=3.\tau \quad\rightarrow\quad \boxed{t_{5\%}=3.\tau}$

- **Réponse à t = τ :**

$s(\tau)=K.a.(1-e^{-1})\approx0,63.K.a \quad\rightarrow\quad \boxed{s(\tau)\approx0,63.K.a}$

3.2. Identification expérimentale des paramètres du modèle d'ordre 1

Les systèmes réels ne sont pas toujours modélisables à partir de nos connaissances. Pour proposer malgré tout un modèle de comportement aussi voisin que possible de celui du système réel, on peut mettre en place des modèles par identification. On réalise pour cela des expérimentations puis on essaye de superposer à la courbe expérimentale de sortie obtenue à une courbe théorique correspondant au mieux à des modèles de comportement biens connus.

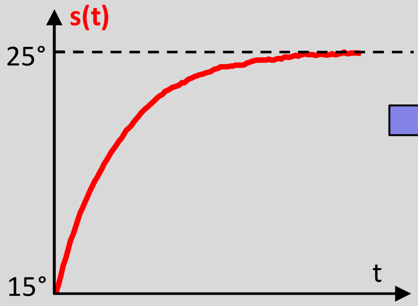


- **Détermination du gain statique K :**

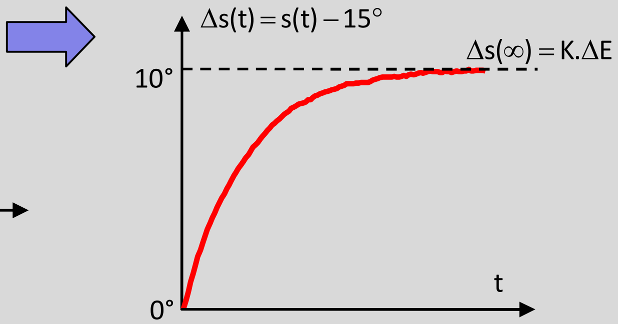
Le gain statique est obtenu à partir du relevé de la valeur finale $s(+\infty)=K.a$

Lors d'un essai de réponse à un échelon, les valeurs initiales ne sont pas toujours nulles.

Exemple : Arbre moteur en position initiale 15° soumis à un déplacement en échelon de tension de 5V.



Pour se ramener aux bonnes conditions initiales, on pose : $\Delta e=5V$ et $\Delta s(t)=s(t)-s(0)$



$\Delta s(\infty)=K.\Delta E$ soit

$$K=\frac{\Delta s(\infty)}{\Delta E}=\frac{s(\infty)-s(0)}{e(\infty)-e(0)}=\frac{10}{5}=2°/V$$

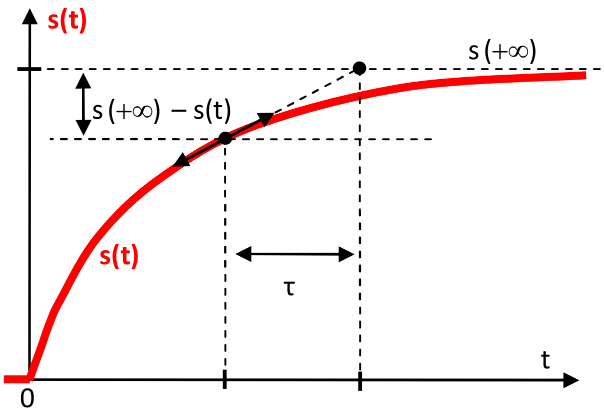
- **Détermination de la constante de temps τ :**

Plusieurs méthodes sont possibles pour déterminer τ, on peut :

- tracer la pente à l'origine pour déterminer τ.
- calculer 63% de la valeur finale pour déterminer τ.
- calculer 95% de la valeur finale pour déterminer 3τ.
- utiliser un instant quelconque t [3] en remarquant que :

$$s(\infty)-s(t)=K.a.e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ donc } s'(t)=\frac{K.a}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{s(\infty)-s(t)}{\tau}$$

Détermination graphique de τ pour un t instant quelconque



[3] voir la construction sur la figure de droite

Après avoir identifié et définit un modèle de comportement, il faut toujours tracer la réponse théorique (sur un logiciel de simulation par exemple) pour vérifier que le modèle de comportement modélise correctement la réponse expérimentale !!

4 - Reponse a une Rampe

L'entrée est définie par une rampe, **e(t)=a.t.u(t)**, soit dans le domaine de Laplace, $E(p)=\frac{a}{p^2}$.

La sortie a donc pour expression dans le domaine de Laplace : $S(p)=\frac{a.K}{p^2.(1+\tau.p)}$

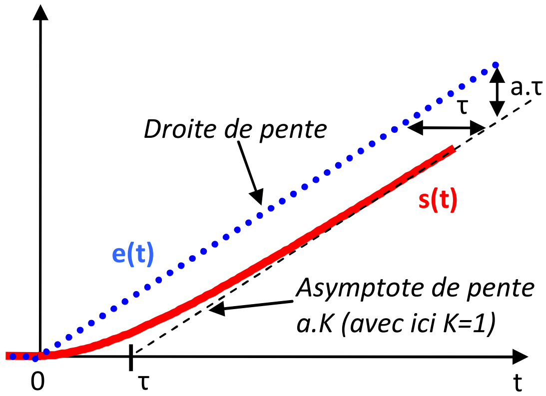
La décomposition en éléments simples donne :

$$S(p)=\frac{A}{p^2}+\frac{B}{p}+\frac{C}{1+\tau.p}=\frac{a.K}{p^2}-\frac{a.K.\tau}{p}+\frac{a.K.\tau^2}{1+\tau.p}$$

La réponse temporelle a donc pour expression :

$$\boxed{s(t)=a.K.\left(t-\tau+\tau.e^{-\frac{t}{\tau}}\right).u(t)}$$

Représentation graphique pour K=1



- **Pente à l'origine :**

$$s'(0^+)=\lim_{t\to 0^+} s'(t)=\lim_{p\to\infty} p.[p.S(p)]=\lim_{p\to\infty} p^2.\frac{a.K}{p^2.(1+\tau.p)}=0 \rightarrow \boxed{\text{Pente à l'origine = 0}}$$

Théorème de la valeur initiale

Transformée de la dérivée (CI nulles)

La tangente à l'origine est une droite horizontale

- **Ordonnée en $+\infty$:**

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} p.S(p)=+\infty \rightarrow \boxed{s(+\infty)=+\infty}$$

Théorème de la valeur finale

- **Etude asymptotique en $+\infty$:**

Lorsque $t\rightarrow+\infty$, le terme $\tau.e^{-\frac{t}{\tau}}\rightarrow 0$, par conséquent $s(t)\rightarrow a.K.(t-\tau)$.
L'asymptote est donc y(t) = a.K.(t – τ). Cette asymptote a donc une pente a.K et coupe l'axe des abscisses en t = τ.

Pour K < 1, l'écart entre l'entrée et la sortie augmente toujours.	Pour K = 1, le système ne rejoint jamais la consigne mais sa variation est parallèle à l'entrée retardée d'une fois la valeur de la constante de temps.	Pour K > 1, l'écart entre l'entré et la sortie diminue, s'annule puis augmente.