

Modélisation des SLCI et Calcul Symbolique

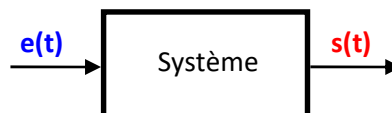


Afin de prévoir le comportement d'un système, on doit non seulement être capable de proposer une modélisation des entrées mais également un modèle comportemental du système, pour ce dernier, le modèle retenu est le Système Linéaire Continu Invariant (SLCI). L'objectif de ce cours est de présenter les hypothèses de modélisation du SLCI, les principaux modèles comportementaux utilisés ainsi que les outils mathématiques utiles en automatique.

1 - HYPOTHESES DE MODELISATION DES SLCI

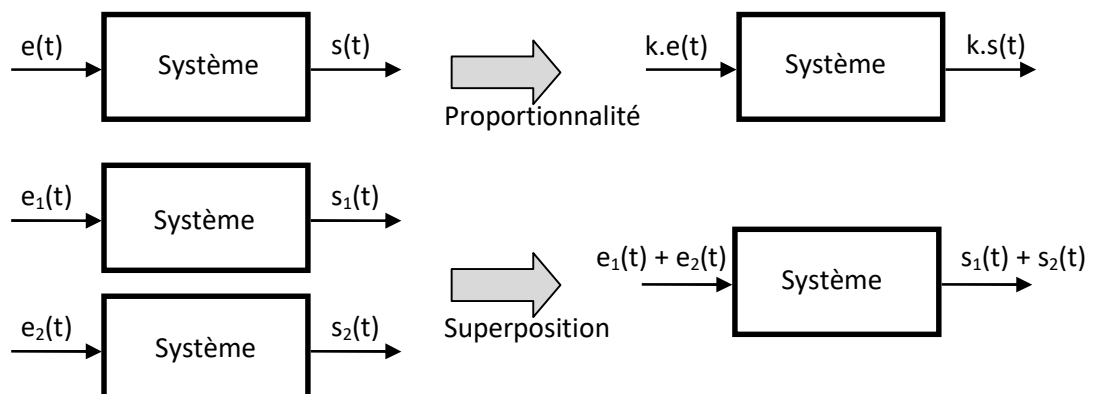
1.1. Le système

Le système est représenté par un schéma-bloc organique contenant le nom du système. Les entrées (causes) sont situées à gauche et les sorties (effets) à droite. Il est caractérisé par une fonction mathématique en entrée $e(t)$ et en sortie $s(t)$.

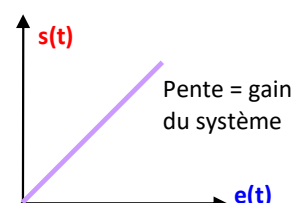


1.2. Système linéaire

Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.



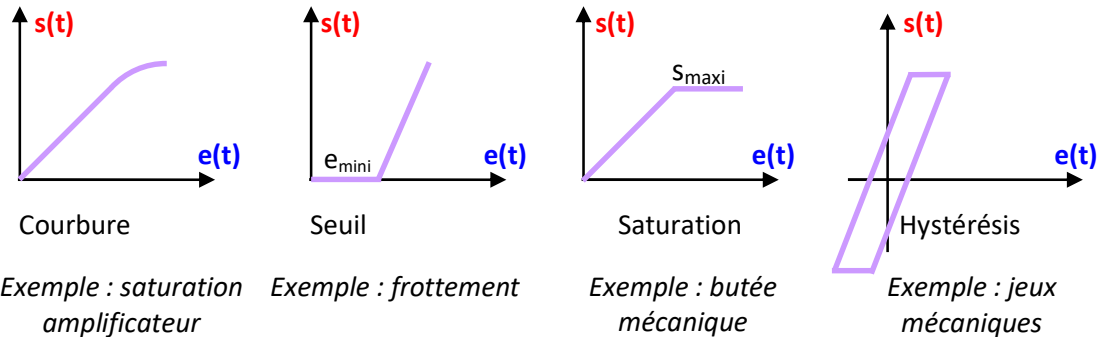
Si le système est linéaire on obtient, en traçant la réponse $s(t)$ en fonction de $e(t)$ (pour un instant donné ou en régime permanent), la caractéristique du système égale à une droite de pente K (gain du système).



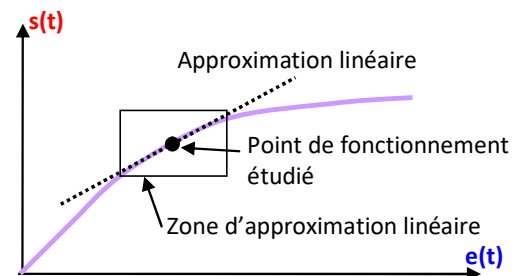


Attention à ne pas confondre la caractéristique sortie fonction de l'entrée avec la courbe sortie fonction du temps qui, elle, est très souvent non-linéaire.

En réalité aucun système n'est parfaitement linéaire. La caractéristique entrée sortie comporte toujours plus ou moins des non linéarités, notamment aux faibles amplitudes (seuils) ou aux fortes amplitudes (saturation, courbure). Le système est dit non linéaire.



Dans la pratique pour étudier les systèmes, on **linéarise** la caractéristique entrée-sortie **au voisinage du point de fonctionnement étudié** en remplaçant la portion de courbe par une droite. Le système est dit alors linéarisé.

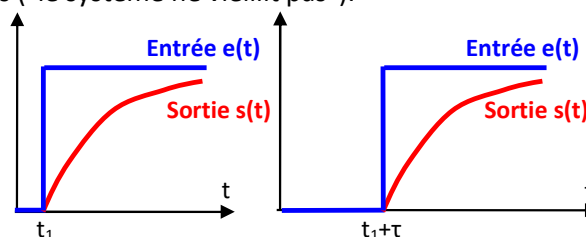


1.3. Système continu

Un système est continu, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont définies à chaque instant (ils sont caractérisés par des fonctions continues). On parle aussi dans ce cas de système analogique.

1.4. Système invariant

Un système est dit invariant si on suppose que les caractéristiques du système ⁽¹⁾ ne varient pas au cours du temps ("le système ne vieillit pas").



1.5. Conséquence

Un système linéaire continu invariant peut être représenté par une équation différentielle à coefficients constants.

2 - LES PRINCIPAUX MODELES COMPORTEMENTAUX (MODELES DE CONNAISSANCE OU DE COMPORTEMENT ⁽²⁾)

Pour les systèmes automatiques réels, on se ramène au cas des SLCI en faisant les hypothèses simplificatrices présentées ci-dessus. La comparaison du modèle avec la réalité permettra de valider ou non les hypothèses proposées. Pour étudier le comportement d'un SLCI, il est nécessaire de déterminer l'équation reliant l'entrée **e(t)** (ou les entrées) et la sortie **s(t)**. Un modèle de connaissance ou un modèle de comportement permet d'aboutir généralement à une telle équation.

⁽¹⁾ masse, dimensions, résistance, impédance, ...

⁽²⁾ On appelle modèle de connaissance, un modèle qui provient de la mise en oeuvre d'équations issues des lois fondamentales de la physique. On appelle modèle de comportement, un modèle qui correspond à une loi purement mathématiques construite par identification à partir de courbes obtenues par l'expérimentation.



Il est très utile de représenter un système complexe en schéma-bloc organique et de le décomposer en sous-systèmes élémentaires plus simples car cette stratégie permet généralement de retrouver des modèles de connaissance bien connus (et présentés ci-dessous) pour chaque sous-système élémentaire.

2.1. Modèle de connaissance le plus simple

Une grande partie des systèmes peut être modélisée par une constante, c'est à dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie : $s(t) = K.e(t)$. La constante de proportionnalité est alors directement le gain du système.

On peut modéliser par un gain la majorité :

- des éléments de transmission de puissance ⁽³⁾. Exemples : réducteur à roue et vis sans vis, à engrenages, système vis-écrou...,
- des préactionneurs ⁽⁴⁾. Exemple : variateur, hacheur, ...,
- des capteurs ⁽⁵⁾. Exemples : potentiomètre, génératrice tachymétrique...

Exemples de systèmes pouvant être modélisé par un gain



2.2. Modèle de connaissance des systèmes du premier ordre

Un modèle plus élaboré, couramment rencontré, est le modèle dit du premier ordre. La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

où : K est le gain statique du système.

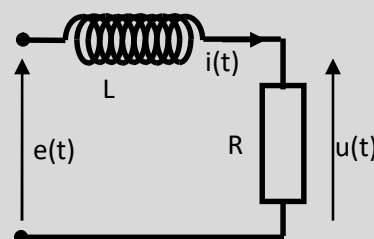
τ est la constante de temps.

Exemple : Moteur pas à pas se comportant comme un circuit RL

On s'intéresse à un circuit RL (résistance + bobine) couramment rencontré dans les circuits électriques (filtres, moteur pas à pas, ...).



Réel



Modèle

Les équations électriques du circuit sont les suivantes :
$$e(t) = L \frac{di(t)}{dt} + u(t) \quad (1)$$

$$u(t) = R \cdot i(t) \quad (2)$$

Soit $e(t) = \frac{L}{R} \cdot \frac{du(t)}{dt} + u(t) \rightarrow$ On obtient bien une équation différentielle d'ordre 1.

La constante de temps vaut $\tau = \frac{L}{R}$ (en secondes) et le gain statique vaut 1.

Modèle de connaissance des systèmes du second ordre

Un autre modèle très couramment rencontré est le modèle dit du second ordre. La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du second ordre est :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \cdot \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + 2 \frac{z}{\omega_0} \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e(t) \quad \text{où :}$$

K est le gain statique du système.

z est le coefficient d'amortissement ⁽⁶⁾.

ω_0 est la pulsation propre non amortie du système ⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ le coefficient d'amortissement z est toujours > 0

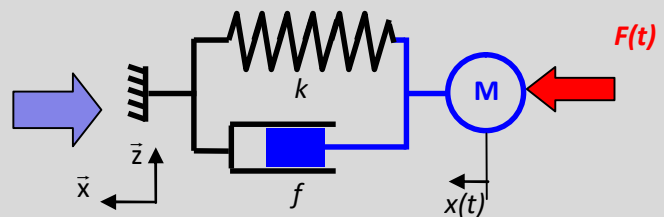
⁽⁷⁾ la pulsation propre non amortie du système ω_0 est toujours > 0

Exemple : Système masse-ressort-amortisseur

On s'intéresse au mouvement d'une roue par rapport au châssis par l'intermédiaire d'un système amortisseur ressort. Ce système peut être modélisé par une masse reliée en série à un ressort et un amortisseur montés en parallèle.



Réel : Système d'amortissement d'un quad



Modèle : Schéma de modélisation du système masse-ressort-amortisseur

On note $F(t)$ la force exercée sur la masse M et $x(t)$ la position de cette masse par rapport à l'équilibre. La masse M est soumise :

- à l'action $F(t)$
- à l'action du ressort : $-k \cdot x(t)$
- à l'action de l'amortisseur : $-f \cdot \frac{dx(t)}{dt}$

L'écriture du principe fondamental de la dynamique sur la masse M permet d'écrire :

$$M \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -f \cdot \frac{dx(t)}{dt} - k \cdot x(t) + F(t) \quad \text{Soit :} \quad M \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + f \cdot \frac{dx(t)}{dt} + k \cdot x(t) = F(t)$$

$\rightarrow$ L'équation obtenue est bien une équation différentielle d'ordre 2.

La pulsation propre non amortie vaut $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ (radians/secondes), le coefficient

d'amortissement vaut $z = \frac{f}{2 \cdot \sqrt{k \cdot M}}$ (sans unité) et le gain statique vaut $K = \frac{1}{k}$ ($m \cdot N^{-1}$).

3 - MODELE COMPORTEMENTAL GENERAL DES SLCI ET DEMARCHE DE RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

Un SLCI est modélisé par un **modèle comportemental** représenté par une équation différentielle d'ordre n reliant la sortie $s(t)$ à l'entrée $e(t)$. Elle est obtenue par la combinaison des différentes équations différentielles issues des modèles de connaissance ou de comportement des sous-systèmes élémentaires constituant le schéma-bloc organique du système global. Elle s'écrit sous la forme générale :

$$a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$$

Les systèmes étudiés impliquent que $n \geq m$ afin de respecter la condition de **causalité**⁽⁸⁾ du système (n est appelé l'ordre du système).

Une fois cette équation obtenue, deux questions peuvent alors se poser :

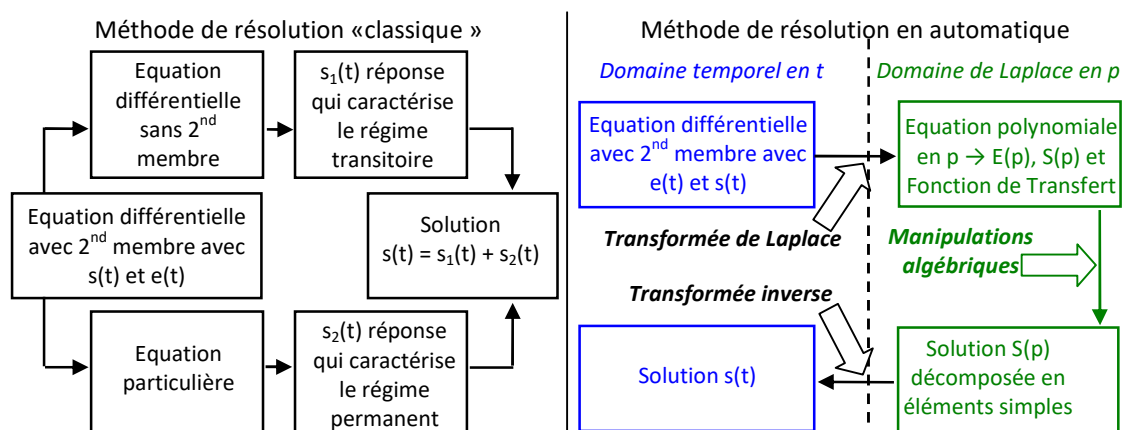
- Comment prendre en compte la modification de modélisation d'un composant (moteur par exemple) de manière aisée ?
- Comment obtenir la réponse du système pour une entrée quelconque afin d'analyser les performances globales du système ?

On constate dans ces deux situations que l'écriture sous forme différentielle du SLCI n'est pas adaptée pour une résolution à la main car la recherche de la solution de l'équation différentielle reste difficile et trop complexe pour des équations d'ordre élevé ou lorsque la consigne $e(t)$ est de forme compliquée.

L'outil privilégié pour traiter un SLCI de manière efficace, tant pour analyser le comportement, que pour résoudre une équation d'ordre quelconque, est la **transformation de Laplace** qui permet d'obtenir une relation algébrique entre la sortie et l'entrée.

L'intérêt principal de cette méthode est de manipuler algébriquement des polynômes plutôt qu'une équation différentielle. Pour cela il faut :

- utiliser la transformée de Laplace pour passer du domaine temporel vers le domaine de Laplace
- manipuler proprement des polynômes pour mettre en forme la solution $S(p)$
- utiliser la transformée inverse de Laplace une fois la solution $S(p)$ mise en forme, pour rebasculer du domaine de Laplace vers le domaine temporel.



⁽⁸⁾ Le principe de causalité est un concept physique universel pour lequel on suppose que la sortie d'un système est une conséquence d'une entrée physique (qui sera la cause). On considère aussi que nos systèmes physiques ne sont pas « rigides » (si un système est dit rigide alors la réponse est immédiate et superposée à l'entrée).



4 - CALCUL SYMBOLIQUE - TRANSFORMÉE DE LAPLACE ET TRANSFORMÉE INVERSE

Ce chapitre n'a absolument pas pour ambition de présenter la théorie de la transformée de Laplace avec toute la rigueur mathématique associée mais plutôt de présenter les propriétés utiles de cette transformation pour son utilisation comme un outil de modélisation bien adapté à l'automatique.

4.1. Définition de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, telle que $f(t)=0$ pour $t<0$ est :

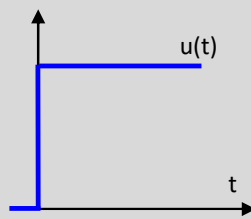
$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt \quad \text{où } p \text{ est une variable complexe.}$$

Cette transformation permet de passer du domaine temporel (variable en t) vers le domaine symbolique de Laplace (variable en p).

- Dans la pratique, on ne calcule que les transformées de Laplace de fonctions causales, c'est-à-dire telles que $f(t) = 0$ pour $t < 0$. Ces fonctions f représentent des grandeurs physiques: intensité, température, effort, vitesse,...
- $F(p)$ n'existe que si l'intégrale a un sens et converge. Dans les cas rencontrés en SII, les conditions d'existence et de convergence seront toujours réunies.
- La variable p peut aussi être noté avec la lettre s (notation utilisée chez les anglophones).

On a l'habitude de noter la transformée de Laplace par une majuscule quand cela est possible ($e(t) \rightarrow E(p)$, $s(t) \rightarrow S(p)$). Cependant, pour ne pas alourdir les notations, on confond parfois les notations si la grandeur originelle est déjà en majuscule ($C(t) \rightarrow C(p)$).

Exemple : Transformée de Laplace de l'échelon unitaire $u(t) = 1$ pour $t>0$



$$U(p) = \mathcal{L}(u(t)) = \int_0^{\infty} u(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot dt$$

$$U(p) = \left[-\frac{e^{-pt}}{p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}$$

4.2. Tableau des transformées de Laplace usuelles

Dans la pratique on évite au maximum de calculer $F(p)$ par la définition, on doit donc se servir directement des résultats de transformées de Laplace pour les fonctions usuelles lors de la résolution des problèmes.

$f(t)$ avec $f(t)=0$ pour $t<0$	$F(p)$	$f(t)$ avec $f(t)=0$ pour $t<0$	$F(p)$
$\delta(t)$ impulsion de Dirac	1	$t \cdot u(t)$ fonction rampe	$\frac{1}{p^2}$
$u(t)$ échelon unitaire	$\frac{1}{p}$	$t^n \cdot u(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{1}{p+a}$	$t^n e^{-at} \cdot u(t)$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cdot \sin(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{\omega}{(p+a)^2 + \omega^2}$	$e^{-at} \cdot \cos(\omega t) \cdot u(t)$	$\frac{p+a}{(p+a)^2 + \omega^2}$



Les transformées de Laplace de l'impulsion de Dirac, de l'échelon, de la rampe et de la fonction exponentielle sont à connaître par cœur car elles sont très utilisées !!!

4.3. Propriétés essentielles

Conditions de Heaviside

On dit qu'une fonction du temps $f(t)$ vérifie les conditions de Heaviside si elle vérifie :

$f(0^+) = 0, f'(0^+) = 0, f''(0^+) = 0, \dots$ C'est à dire si les **conditions initiales sont nulles**.

Unicité

- A une fonction $f(t)$ correspond une fonction $F(p)$ unique,
- à une fonction $F(p)$ correspond une fonction $f(t)$ unique.

Linéarité ⁽⁹⁾

Soit $\mathcal{L}(x_1(t)) = X_1(p)$, $\mathcal{L}(x_2(t)) = X_2(p)$, A et B deux constantes, alors :

$$\mathcal{L}(A.x_1(t) + B.x_2(t)) = A.\mathcal{L}(x_1(t)) + B.\mathcal{L}(x_2(t)) = A.X_1(p) + B.X_2(p)$$

Transformée de la dérivée

Pour la dérivée première : $\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}f(t)\right) = p.F(p) - f(0^+)$

Pour la dérivée seconde : $\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right) = p^2.F(p) - p.f(0^+) - \frac{d}{dt}f(0^+)$

En généralisant on a dans les conditions de Heaviside : $\mathcal{L}\left(\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right) = p^n.F(p)$



Dériver par rapport à t dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine

symbolique dans les conditions de Heaviside : $\frac{d^n}{dt^n} \rightarrow \times p^n$

Exemple : transformation de l'équation différentielle $a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0$

$a_2 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_0 x(t) = 0 \xrightarrow{\mathcal{L}} X(p)[a_2 p^2 + a_1 p + a_0] = 0$ dans les conditions de Heaviside.

Transformée de l'intégrale

$\mathcal{L}\left(\int f(t).dt\right) = \frac{F(p)}{p}$ pour des conditions initiales nulles.



Intégrer dans le domaine temporel revient à diviser par p dans le domaine symbolique dans

les conditions de Heaviside : $\int \rightarrow \times \frac{1}{p}$

Exemple : Passage d'une vitesse à une position (intégrateur)

$\theta(t) = \int \Omega(t).dt \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta(p) = \frac{\Omega(p)}{p}$ dans les conditions de Heaviside.

⁽⁹⁾ Par la suite, cette propriété est constamment utilisée de manière naturelle.

4.4. Théorèmes pratiques

Théorème de la valeur initiale et de la valeur finale

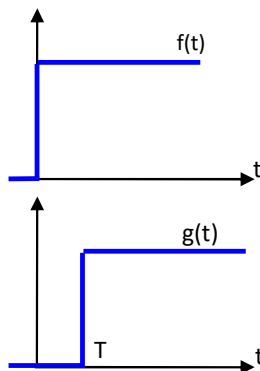
Lorsqu'on veut obtenir des informations sur la fonction temporelle $f(t)$ mais que l'on ne souhaite pas déterminer la transformée inverse de $F(p)$, on peut utiliser les deux théorèmes suivants :

- le théorème de la valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} p.F(p)$
- le théorème de la valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p.F(p)$



Le théorème de la valeur finale est le plus utile des deux car il permet de déterminer le régime permanent sans faire le calcul complet (et pénible) de la transformée de Laplace inverse.

Théorème du retard



Soit une fonction $f(t)$ de transformée de Laplace $F(p)$.

$g(t)$ peut être déduite de $f(t)$ en lui faisant subir un décalage temporel (ou retard) de valeur T .

Par conséquent $G(p)$ peut être calculée en exploitant ce décalage temporel, c'est le théorème du retard :

$G(p) = e^{-Tp} \cdot F(p)$ où e^{-Tp} correspond à l'opérateur retard.



Tout signal peut s'écrire comme la somme de signaux élémentaires que l'on peut coupler avec le théorème du retard de fonctions. On est alors en mesure de modéliser tout type d'entrée.

Théorème de l'amortissement :

$$\mathcal{L}(e^{-at} \cdot f(t)) = F(p + a)$$

4.5. Décomposition en éléments simples et transformation inverse

La transformation de Laplace inverse consiste à rechercher la fonction temporelle $f(t)$ qui correspond à une fonction $F(p)$ donnée. Dans les problèmes d'automatique, $F(p)$ se présente sous la forme d'une fraction rationnelle en p qu'il faut décomposer en éléments simples pour retrouver les fractions élémentaires du tableau présenté paragraphe 3.2. Cette manipulation permet d'identifier la transformée inverse de chaque fraction élémentaire simplement par « lecture » du tableau du paragraphe 3.2. La fonction $f(t)$ correspond au final à une somme de fonctions temporelles élémentaires.

Exemple : La fonction $F(p) = \frac{p+2}{(p+5)(p+10)}$ se présente sous la forme $\frac{A}{p+5} + \frac{B}{p+10}$ avec

$A = -\frac{3}{5}$ et $B = \frac{8}{5}$ lors de sa décomposition en éléments simples. On applique ensuite la transformée inverse de Laplace pour obtenir $f(t)$:

$$\mathcal{L}^{-1} \rightarrow f(t) = -\frac{3}{5} \cdot e^{-5t} + \frac{8}{5} \cdot e^{-10t}.$$

Méthodes de décomposition en éléments simples des fonctions $F(p)$ (voir annexe TD 04)

5 - REPRESENTATION DES SLCI PAR FONCTION DE TRANSFERT

La transformation de l'équation différentielle du SLCI en équation polynomiale permet de déterminer une fonction appelée **fonction de transfert** qui **caractérise le comportement du SLCI**.

5.1. Notion de fonction de transfert

⁽¹⁰⁾ où $e(t)$ correspond toujours à l'entrée du système et $s(t)$ à la sortie du système

Si on applique la transformation de Laplace sur l'équation différentielle d'un système $a_n \cdot \frac{d^n s(t)}{dt^n} + \dots + a_0 \cdot s(t) = b_m \cdot \frac{d^m e(t)}{dt^m} + \dots + b_0 \cdot e(t)$ ⁽¹⁰⁾, on obtient pour des conditions initiales nulles : $(a_n \cdot p^n + \dots + a_0) \cdot S(p) = (b_m \cdot p^m + \dots + b_0) \cdot E(p)$.

⁽¹¹⁾ on peut aussi utiliser le terme **transmittance**

On appelle **fonction de transfert** $H(p)$ du système ⁽¹¹⁾ la relation dans le domaine symbolique telle que $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{b_m \cdot p^m + \dots + b_0}{a_n \cdot p^n + \dots + a_0}$.



- Lors de l'étude de SLCI, on se place toujours dans le cas de conditions initiales nulles (conditions de Heaviside) car le niveau initial du système importe peu et que c'est plutôt la réaction à une excitation à partir d'un état stable que l'on souhaite étudier.
- On peut toujours se ramener à des conditions initiales nulles moyennant un changement d'origine.

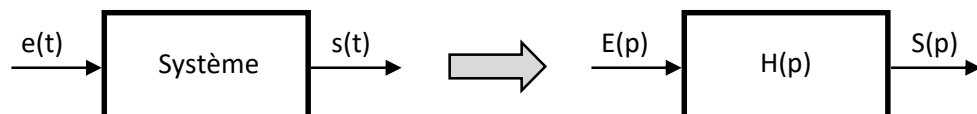


- La **fonction de transfert caractérise le comportement intrinsèque du système et ne dépend ni de l'entrée, ni de la sortie**.
- Dans le domaine symbolique, la relation entre l'entrée et la sortie est linéaire : $S(p) = H(p) \cdot E(p)$



Pour représenter le système décrit par la fonction de transfert $H(p)$, on utilise des blocs.

- Un bloc peut représenter un composant ou bien un sous-système ou également un système complexe.
- Le **schéma-bloc organique** doit être modifié en **schéma-bloc** pour lequel les noms des composants sont remplacés par la fonction de transfert correspondante et les variables temporelles sont remplacées par les variables symboliques ($E(p)$, $S(p)$...).



5.2. Définition de la fonction de transfert sous forme canonique

Les fonctions de transfert se présenteront toujours sous forme de fraction rationnelle, mise sous la forme suivante que l'on appelle **forme canonique** :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K \cdot (1 + b'_1 \cdot p + \dots + b'_m \cdot p^m)}{p^\alpha \cdot (1 + a'_1 \cdot p + \dots + a'_{n-\alpha} \cdot p^{n-\alpha})}$$

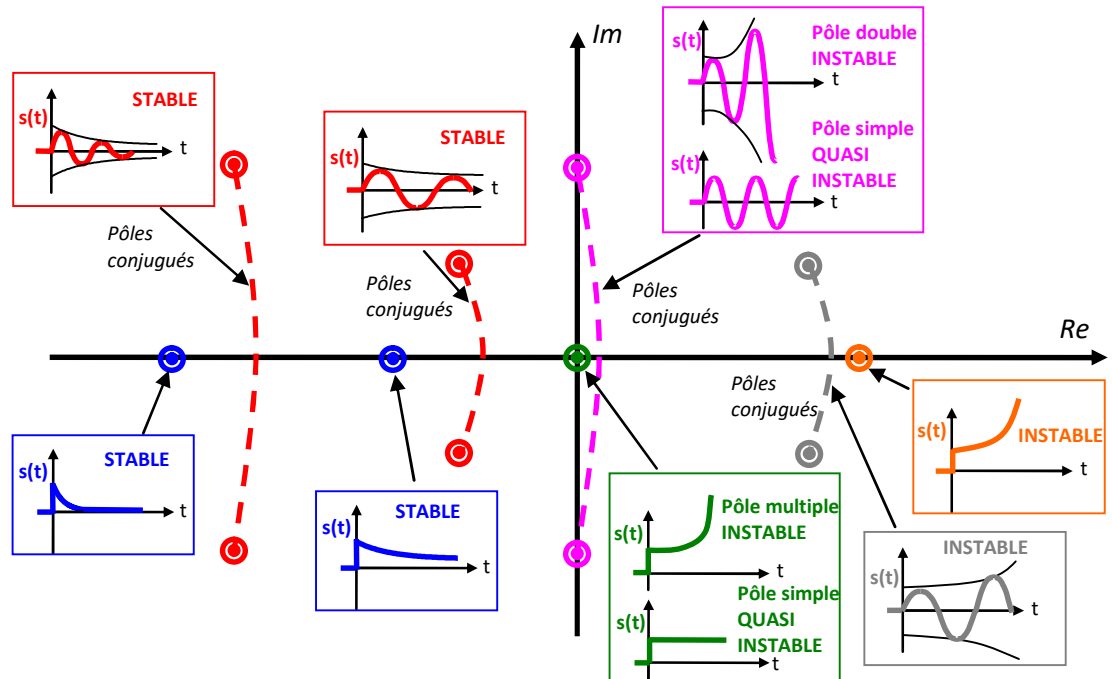
avec α : **classe du système** (représente le nombre d'intégration dans le système $\alpha \geq 0$)
 n : ordre du système, identique à l'ordre de l'équation différentielle
 K : **gain statique** (permet de connaître le comportement du système en régime permanent). K possède une unité (unité de la variable de sortie / unité de la variable d'entrée).

5.3. Notion de pôle et de zéro

On appelle **pôles** toutes racines du dénominateur de la fonction de transfert. On appelle **zéros** toutes racines du numérateur de la fonction de transfert.

Le comportement dynamique du système est entièrement défini par les pôles et les zéros de la fonction de transfert car ils permettent d'analyser le comportement du système sans calculer la réponse temporelle⁽¹²⁾.

⁽¹²⁾ on s'en servira par exemple au second semestre pour étudier la stabilité des SLCI.



Allure de la réponse à l'impulsion de Dirac selon la position des pôles de la FTBF d'un système⁽¹³⁾.

⁽¹³⁾ extrait du cours sur la stabilité (2nd semestre de MPSI ou PCSI).